Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 1 , Abgabe: 30.04.98 , 13.00 Uhr

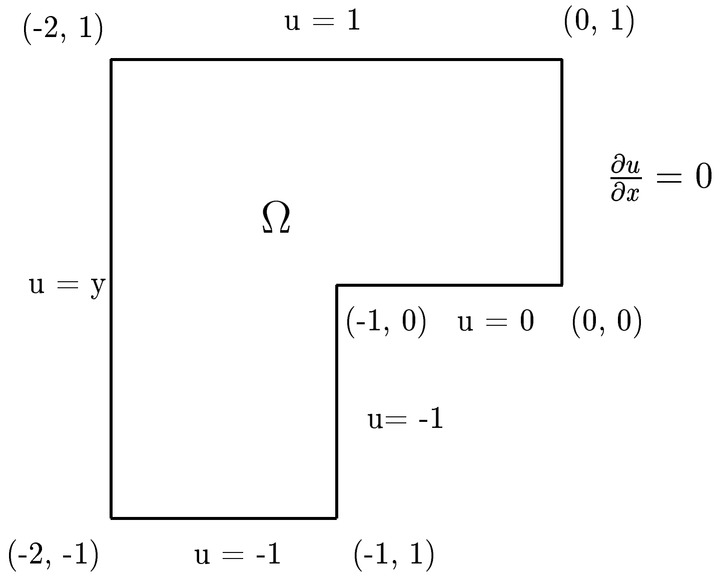
Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, sei $n \in \mathbb{N}$ und $u \in \varphi^2(\bar{\Omega})$.

Zeigen Sie:
Gilt $\Delta u = u^{2n+1}$ mit $u_{|\Gamma} = 0$, dann ist $u \equiv 0$ in Ω.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (s. Abb.) soll die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0$$

mit den in der Abbildung angegebenen Randwerten gelöst werden.



a) Bestimmen Sie eine Lösung. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, daß die Lösung eindeutig ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3: (Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, $\underline{u} := (u_1, ..., u_d)$ mit $u_i \in \varphi^2(\bar{\Omega})$, $i = 1, ..., d$, sei $p \in \varphi^1(\bar{\Omega})$ und sei $f \in \varphi(\Omega)$. Die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\nu\Delta\underline{u} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} + \Delta p & = & f \\ div\underline{u} & = & 0 \end{array}\right\} \text{ in } \Omega \qquad (1)$$

$$\underline{u} = 0 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega$$

beschreiben ein Modell für die Strömung eines homogenen, inkompressiblen, viskosen Fluids. Dabei beschreibt $\underline{u} = (u_1, ..., u_d)$ den Geschwindigkeitsvektor und p den (skularen) Druck des Fluids. Die Randbedingungen schreiben vor, daß die Flüssigkeit am Rand ruht. Die Viskosität wird durch $\nu > 0$ beschrieben.

Zeigen Sie, daß die Gleichungen (1) ein gleichmäßig Miptischess System im Sinne der Agmon-Douglis-Nirenberg Theorie bilden.

Hinweis:

$$(\underline{u}\cdot\delta)\underline{u} = \sum_{i=1}^{d} u_i \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u_d}{\partial x_i}\right)$$

Aufgabe 4: (Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, sternförmiges Gebiet. Die stationären Eulerschen Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen Fluids vereinfachen sich bei einer wirbelfreien Strömung zu

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \Delta U = 0 \\ \text{ii) } p + \frac{1}{2}\varphi\nabla U\cdot\nabla U + \varphi G = 0 \end{array}\right\} \quad \text{in } \Omega$$

Dabei ist U die Strömungsfunktion aus der sich der Geschwindigkeitsvektor $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ durch $\underline{u} = \nabla U$ ergibt. Der Druck wird durch p beschrieben, die Dichte duch φ und das Gravitationspotential durch G.

Zeigen Sie, daß bei einer solchen Strömung der minimale Druck immer auf dem Rand angenommen wird.

Hinweis:
Wenden Sie den Laplaceoperator auf (ii) an und benutzen Sie das Maximumprinzip. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß $\Delta G = 0$ ist.

a) Ein Fluid ist inkompressibel, wenn $div\underline{u} = 0$
   $(div\underline{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i})$

b) Eine Strömung heißt wirbelfrei, wenn $rot\underline{u} = 0$
   $(rot\underline{u} = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}))$