Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 20.1.2011
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 13

Abgabe: 27.1.2011, vor der Vorlesung

Auf diesem Blatt betrachten wir Randwertprobleme (RWP) der Form

$$\begin{array}{rcllll} L(u) & := & -(pu')' + qu & = & f & \text{in } (a,\, b), \\ R_1(u) & := & \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) & = & 0, & \\ R_2(u) & := & \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) & = & 0. & \end{array} \tag{1}$$

Wenn nicht anders angegeben erfüllen die Daten folgende Regularitätsbedingungen:

$$p \in C^1(a,\, b),\ p \geq p_0 > 0,\ q, f \in C^0(a,\, b),\ q \geq 0,\ |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0,\ |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

und wir gehen davon aus, dass das RWP eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 1 (Greensche Funktion) (4 Punkte)

Seien u_1, u_2 nicht–triviale Lösungen der Randwertprobleme $L(u_1) = 0$, $R_1(u_1) = 0$ bzw. $L(u_2) = 0$, $R_2(u_2) = 0$. Zeigen Sie, dass $u(x) = \int_a^b G(x,\, y) f(y) dy$ die Lösung von (1) ist mit

$$G(x,\, y) = -\frac{1}{w} \begin{cases} u_2(x) u_1(y), & y < x, \\ u_1(x) u_2(y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei können Sie verwenden, dass $w \neq 0$ der konstante Wert der Abb. $x \mapsto p(x)W(x)$ mit der Wronsky–Determinante $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$ ist.

Aufgabe 2 (Kontinuierliches Maximumsprinzip) (4 Punkte)

Sei G wie in Aufgabe 1 definiert und sei $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Zeigen Sie

(i) $G(x,\, y) \neq 0$ für $x, y \in (a,\, b)$.

(ii) Sei v die Lösung von $L(v) = 1$, $R_1(v) = R_2(v) = 0$. Dann gilt

$$\int_a^b \int_a^b G(x,\, y)\, dx\, dy = \int_a^b v(x)\, dx, \quad \int_a^b (p(v')^2 + qv^2)\, dx = \int_a^b v(x)\, dx.$$

Benutzen Sie das bisher gezeigte, um das kontinuierliche Maximumsprinzip zu zeigen: Ist $u \in C^2(a,\, b)$ mit $L(u) \geq 0$ auf $[a,\, b]$ und $u(a) = u(b) = 0$, so ist $u \geq 0$ auf $[a,\, b]$.

Aufgabe 3 (Diskretes Maximumsprinzip) (4 Punkte)
Betrachten Sie das RWP (1) mit $p = 1$, $q = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.

a) Diskretisieren Sie dieses RWP auf einem gleichmäßigen Gitter mit der Gitterweite $h = \frac{1}{n+1}$ und Randpunkten $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = 1$ mittels der Differenzenapproximation $u''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))$ und stellen Sie für die Approximationswerte $u_i \approx u(x_i)$ das definierende lineare Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ auf mit einer Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Vektoren $u_h = (u_1, \dots, u_n)$, $f_h = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_i = f(x_i)$.

b) Beweisen Sie das diskrete Maximumsprinzip: Ist $A_h v_h \geq 0$, dann gilt $v_h \geq 0$; dabei ist ein Vektor $w_h = (w_1, \dots, w_n)$ größer oder gleich Null, falls alle Komponenten w_i größer oder gleich Null sind.
Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung für $v_s := \min(v_j)$ und zeigen Sie, dass ohne Einschränkung $s = 1$ oder $s = n$ gewählt werden kann.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des diskreten Maximumsprinzips, dass die Matrix A_h regulär ist.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Randwertproblem) (4 Punkte)
Betrachten Sie das RWP aus Aufgabe 3 mit $f = 1$, d.h., $-u'' = 1$, $u(0) = u(1) = 0$. Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Berechnung der Lösung dieses RWPs mittels Differenzenapproximationen. Dazu sollte das entsprechende lineare Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ aufgestellt und gelöst werden. Wählen Sie hierfür $n = 1000$ innere Gitterpunkte und plotten Sie die Approximation zusammen mit der exakten Lösung $u(x) = \frac{1}{2}(x(1-x))$ in ein Schaubild.