Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen 13.1.2011

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 12

Abgabe: 20.1.2011, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (zum Beweis von Satz 3.77) (4 Punkte)
Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) mit (iv) und (v) in Satz 3.77 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwenden Sie auch die bereits gezeigte Äquivalenz von (i) mit (ii) bzw. (iii).

Aufgabe 2 (zum Beweis von Satz 3.77) (4 Punkte)
Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) mit (vi) in Satz 3.77 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwenden Sie auch die bereits gezeigte Äquivalenz von (i) mit (ii) bzw. (iii).

Aufgabe 3 (Maximale Konsistenzordnung) (4 Punkte)
Finden Sie zu $\rho(t) = t^2 - 1$ Koeffizienten b_0, b_1, b_2, so dass das lineare Mehrschrittverfahren (ρ, σ) mit $\sigma(t) = \sum_{i=0}^{2} b_i t^i$ die maximal mögliche Konsistenzordnung hat und bestimmen Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Prädiktor–Korrektor–Verfahren) (4 Punkte)
Implementieren Sie das *Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams*. Zur Lösung eines gegebenen Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

wird hierbei zunächst in der Prädiktor–Phase durch das explizite Mehrschrittverfahren

$$u_{j+3} = u_{j+2} + \frac{h}{12}\left(23 f_{j+2} - 16 f_{j+1} + 5 f_j\right)$$

mit $f_{j+l} := f(x_{j+l}, u_{j+l})$ ausgehend von den bereits bekannten Näherungen $u_{j+l} \approx y(x_{j+l})$, $l = 0, 1, 2$, eine Näherung $u_{j+3} \approx y(x_{j+3})$ bestimmt. Anschließend wird in der Korrektor–Phase ein einziger Schritt des impliziten Mehrschrittverfahrens

$$u_{j+3} = u_{j+2} + \frac{h}{24}\left(9 f_{j+3} + 19 f_{j+2} - 5 f_{j+1} + f_j\right)$$

durchgeführt, um den Näherungswert u_{j+3} zu verbessern.
Testen Sie Ihr Programm an dem Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{1}{2} y, \quad y(0) = 2,$$

und bestimmen Sie die Approximationsfehler an der Stelle $x_N = N \cdot h = 3$ für $h = \frac{3}{N}$, $N = 10^k$, $k = 1, 2, 3$. Verwenden Sie zur Bestimmung der Startwerte u_1, u_2 das explizite Euler-Verfahren.