Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

23.12.2010

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 11

Abgabe: 13.1.2011, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beweis von Satz 3.48) (4 Punkte)
Beweisen Sie die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) aus Satz 3.48.
Hinweis: Für $n \geq 0$ kann $p(n+t)$ mit Hilfe der Newton–Interpolationsformel zu den Stützstellen $x_i = i$ dargestellt werden: $p(n+t) = \sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{l=0}^{i-1}(t-l)$, wobei $a_m = a_{m+1} = \cdots = a_k = 0$, da der Grad von p kleiner als m ist.

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma 3.54) (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 3.54 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Beweis von Satz 3.63) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $f \in C^k(S)$ das k–Schritt BDF–Verfahren Konsistenzordnung k hat, falls die Startwerte hinreichend konsistent sind.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe: Anw. des Differenzenkalküls) (4 Sonderpunkte)
Sie wohnen in einem Hochhaus ohne Fahrstuhl und mit $n \geq 1$ Stufen. Sie können beim Hochsteigen entweder eine oder zwei Stufen auf einmal nehmen. Berechnen Sie die Anzahl der Varianten u_n, wie Sie die n Stufen hochgehen können.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ gilt.

Aufgabe 5 (Programmieraufgabe: BDF–Verfahren) (4 Punkte)
Schreiben Sie eine Routine, welche das BDF–k Verfahren mit $k = 2$ und $q = 1$ zur Lösung eines Anfangswertproblems $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ realisiert. Ihrer Methode sollen die Anfangswerte x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Schrittweite $h > 0$ sowie ein Punkt $\tilde{x}$ übergeben werden, in welchem der Funktionwert $\tilde{y}(\tilde{x})$ der exakten Lösung $\tilde{y}$ durch das Verfahren approximiert werden soll. Zur Bestimmung des zweiten erforderlichen Startwertes soll ein Euler-Schritt durchgeführt werden.
Berechnen Sie mit Ihrem BDF–Verfahren eine Approximation von $y(4)$, wobei $y(x) = (\sin(x) + 1)^{0.25}$ die Lösung des AWP mit rechter Seite $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{4y^3}$ und dem Anfangswert $y_0 = 1$ ist. Geben Sie für $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 10$, die Approximation sowie den Fehler e_h zur exakten Lösung aus. Bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung

(EOC, Experimental Order of Convergence), indem Sie für alle aufeinanderfolgenden Schrittweiten h_1, h_2 die Formel

$$EOC(h_1, h_2) = \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$$

auswerten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Resultaten von Aufgabe 4, Blatt 10.