Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 16.12.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 10

Abgabe: 23.12.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Differentialgleichung 2. Ordnung) (4 Punkte)
Diskretisieren Sie das AWP

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

mit exakter Lösung $\tilde{y}(x) = x - \sin(x)$ auf einem äquidistanten Gitter $I_h \subset [0,1]$, $h = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, indem Sie y'' mit zentralen Differenzen diskretisieren:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $u_{j+2} - 2u_{j+1} + (1+h^2)u_j = jh^3$ für $j = 0, \ldots, m-2$ gilt, wobei $u_j \approx y(j/m)$.

b) Zeigen Sie, dass das geschilderte Verfahren mit Startwerten $u_0 = u_1 = 0$ gedeutet werden kann als explizites Euler–Verfahren angewendet auf das AWP

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 0, \\ y_2' &= x - y_1, & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Fortsetzung von Aufgabe 3, Blatt 9) (4 Punkte)
Gegeben sei eine Schar von linearen Anfangswertproblemen $y'(x) = \lambda y(x)$, $y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0$, $x \in I = [0,1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ durch ein implizites Runge–Kutta–Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie, dass

$$u_i = (R(\lambda h))^i \, u_0.$$

gilt, wobei $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen P und Q höchstens m–ten Grades. Bestimmen Sie jeweils eine Funktion R für die impliziten Runge–Kutta–Verfahren mit den Schemata

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Aufgabe 3 (Kollokationsverfahren) (4 Punkte)
Ein Polynom $w_m(x)$ vom Grad m ist ein *Kollokationspolynom* für das AWP $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$ auf $I = [a,\, a + h]$, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

$$w_m(a) = y_0 + \varepsilon_0, \quad w_m'(a + \alpha_i h) = f(a + \alpha_i h,\, w_m(a + \alpha_i h))$$

für gegebene Werte $\alpha_i \in [0,\, 1]$, $i = 1, \ldots, m$; d.h., w_m erfüllt die DGL in den Kollokationspunkten $a + \alpha_i h$. Zeigen Sie, dass das Kollokationsverfahren äquivalent ist zu einem m–stufigen impliziten Runge–Kutta–Verfahren.
Hinweis: Schreiben Sie $w_m'(a + sh) = \sum_{i=1}^{m} w_m'(a + \alpha_i h) L_i(s)$, $s \in [0,\, 1]$, mit geeigneter Basis L_i von Polynomen vom Grad $(m - 1)$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Impl. Runge–Kutta–Verfahren) (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, welches das einstufige implizite Runge–Kutta–Verfahren mit Schema

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

zur Lösung eines Anfangswertproblems $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ realisiert. Hierbei sind Gleichungen vom Typ $k_1 = f(x_i + \frac{h}{2},\, u_i + \frac{h}{2} k_1)$ implizit zu lösen. Führen Sie dazu Fixpunktiterationen $k_1^{(j+1)} = f(x_i + \frac{h}{2},\, u_i + \frac{h}{2} k_1^{(j)})$ mit Start $k_1^{(0)} = f(x_i,\, u_i)$ und Abbruchkriterium $|k_1^{(j+1)} - k_1^{(j)}| \leq 10^{-12}$ durch. Es gilt dann $u_{i+1} = u_i + h k_1$. Ihrer Methode sollen die Anfangswerte $x_0,\, y_0 \in \mathbb{R}$, die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Schrittweite $h > 0$ sowie ein Punkt $\tilde{x}$ übergeben werden, in welchem der Funktionwert $\tilde{y}(\tilde{x})$ der exakten Lösung $\tilde{y}$ durch das Verfahren approximiert werden soll.
Berechnen Sie mit Ihrem impliziten Runge–Kutta–Verfahren eine Approximation von $y(4)$, wobei $y(x) = (\sin(x) + 1)^{0.25}$ die Lösung des AWP mit rechter Seite $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{4y^3}$ und dem Anfangswert $y_0 = 1$ ist. Geben Sie für $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 10$, die Approximation sowie den Fehler e_h zur exakten Lösung aus. Bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung (EOC, Experimental Order of Convergence), indem Sie für alle aufeinanderfolgenden Schrittweiten $h_1,\, h_2$ die Formel

$$EOC(h_1,\, h_2) = \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$$

auswerten.