Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen 9.12.2010

Übung zur Vorlesung

# Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 9

**Abgabe:** 16.12.2010, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1 (Diskretes Lemma von Gronwall)** (4 Punkte)
Zeigen Sie: Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Folgen mit $e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n$ für $n < N$. Dann gilt:

$$e_n \leq \left(e_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j\right) \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} q_j\right) \qquad \text{für } n < N.$$

**Aufgabe 2 (Dreistufige Runge–Kutta–Verfahren)** (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Runge–Kutta–Verfahren der Konsistenzordnung 3 mit 3 Stufen.

**Aufgabe 3 (Runge–Kutta–Verfahren)** (4 Punkte)
Gegeben sei eine Schar von linearen Anfangswertproblemen $y'(x) = \lambda y(x)$, $y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0$, $x \in I = [0,1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ mit $u_0 = y_0$ durch ein explizites Runge–Kutta–Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter $I_h$ gegeben. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P$ höchstens $m$–ten Grades gibt mit

$$u_i = (P(\lambda h))^i \, u_0.$$

Bestimmen Sie das Polynom $P$ für das verbesserte Euler–Verfahren mit Verfahrensfunktion $\varphi(x,y,h) := f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y))$ und für das klassische Runge–Kutta–Verfahren. Vergleichen Sie es jeweils mit der Taylorreihe für die exakte Lösung des AWP.

**Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Explizite Runge–Kutta–Verf.)** (4 Punkte)
Schreiben Sie eine Routine, welche die Funktionalität eines allgemeinen Runge–Kutta–Verfahrens hat. Zur Lösung eines gegebenen Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ sollen dieser Routine als Parameter das Butcher–Tableau des zu verwendenden Runge–Kutta–Verfahrens, die Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die Schrittweite $h > 0$ sowie ein Punkt $\tilde{x}$ übergeben werden, in welchem der Funktionwert $\tilde{y}(\tilde{x})$ der exakten Lösung $\tilde{y}$ durch das Verfahren approximiert werden soll.
Berechnen Sie mit dem expliziten Euler–Verfahren, dem verbesserten Euler–Verfahren und dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren eine Approximation von $y(4)$, wobei $y(x) = (\sin(x)+1)^{0.25}$ die Lösung des AWP mit rechter Seite $f(x,y) = \frac{\cos(x)}{4y^3}$ und dem Anfangswert $y_0 = 1$ ist. Geben Sie für $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 10$, die Approximation sowie den Fehler zur exakten Lösung aus.