Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 2.12.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 8

Abgabe: 9.12.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lösung eines AWP) (4 Punkte)
Sei $I = [a, b]$, $G \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und offen, $y_0 \in G$ und sei $f \in C^0(S, \mathbb{R}^n)$ mit $S := I \times G$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

a) $y : I \to \mathbb{R}^n$ löst (AWP).

b) $y \in C(I, G)$ und $y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))ds$.

Aufgabe 2 (Picard–Lindelöf) (4 Punkte)
Es gelten die selben Voraussetzungen wie in Aufgabe 1 und zusätzlich erfülle f die Bedingung $||f(x, y)||_\infty \leq M$ für alle $(x, y) \in S$ sowie die Lipschitz–Bedingung

$$||f(x, y) - f(x, z)||_\infty \leq L||y - z||_\infty \quad \text{für alle } (x, y),\ (x, z) \in S.$$

Sei $y_0 \in G$ gegeben, so dass für ein $\sigma \geq M(b - a)$ gilt $\{y : ||y - y_0||_\infty \leq \sigma\} \subset G$. Dann gilt:

a) (AWP) hat auf I genau eine Lösung $\tilde{y}$.

b) Für alle $x \in I$ gilt $(x, \tilde{y}(x)) \in K_M(a, y_0) \cap S$ mit
$K_M(a, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : ||y - y_0||_\infty \leq M|x - a|\}$.

Aufgabe 3 (Lemma von Gronwall) (4 Punkte)
Seien $p, q \in C([a, b])$ gegeben mit $p, q \geq 0$ und die Funktion $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ erfülle für alle $x \in [a, b]$ die Integralungleichung $0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)e(s)ds$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)p(s) \exp\left(\int_s^x q(t)dt\right) ds.$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Einschritt–Verfahren) (4 Punkte)

Gegeben sei das AWP

$$x'(t) = x^2(t), \quad x(0) = 1 \quad \text{auf } I := [0, 0.5],$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \ t \in I.$$

Schreiben Sie ein Programm, das mit Hilfe der Verfahren von *Euler* und *Heun* Näherungswerte für $x(0.5) = 2$ bestimmt. Arbeiten Sie mit der Schrittweite

$$\Delta t = 2^{-k} \text{ für } k = 1, \dots, 10.$$

Geben Sie Tabellen mit den folgenden Daten aus:

$$\Delta t \quad | \quad x_{\Delta t}(0,5) \quad | \quad e_{\Delta t}(0.5) \quad | \quad -\ln(|e_{\Delta t}(0.5)|),$$

wobei $x_{\Delta t}$ die approximative Lösung und $e_{\Delta t}$ den Fehler zwischen exakter und approximativer Lösung bezeichnen. Tragen Sie jeweils $-\ln(|e_{\Delta t}(0.5)|$ über $-\ln(\Delta t)$ auf und interpretieren Sie das Ergebnis.

Weihnachtsmarkt–Treffen

Wir laden alle Teilnehmer dieser Vorlesung zu einem Treffen auf dem Weihnachtsmarkt am

7. Dezember 2010 um 18:00 Uhr

ein. Treffpunkt ist der Glühweinstand an der Überwasserkirche gegenüber vom Cafe Lazzaretti. Bei dem derzeitigen winterlichen Wetter schmeckt der Glühwein ja besonders gut!
Wir hoffen auf rege Beteiligung und wünschen allen eine frohe Adventszeit!