Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 25.11.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 7

Abgabe: 2.12.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Interpolationsquadratur) (4 Punkte)
Geben Sie die Interpolationsquadraturformel auf $C([a,b])$ für die Gewichtsfunktion $w = 1$ und die Stützstellen

$$x_j = a + (j+1)h, \quad 0 \leq j \leq n, \quad h = \frac{b-a}{n+2},$$

für $n = 3$ an.

Aufgabe 2 (Restgliedabschätzung für die Simpson–Regel) (4 Punkte)
Sei $f \in C^4([a,b])$, $a < b$. Sei $S(f)$ die Simpson–Regel zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Zeigen Sie, dass folgende Restgliedgleichung für ein $\xi \in [a,b]$ gilt:

$$I(f) - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

Zeigen Sie weiter, dass für die zusammengesetzte Simpson–Regel $S_h(f)$ mit einem $\xi \in [a,b]$ gilt:

$$|I(f) - S_h(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 ||f^{(4)}||_\infty.$$

Aufgabe 3 (Gaußsche Quadraturformel) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es keine Interpolationsquadratur Q_n vom Grad n gibt, welche für P_{2n+2} exakt ist.

b) Sei $w \in L^1(I)$ eine zulässige Gewichtsfunktion, p_n, $n \in \mathbb{N}$, seien bzgl. $(\cdot,\cdot)_w$ orthogonale Polynome mit $p_n \in P_n$. Q_n sei die zugehörige Gaußsche Quadraturformel und $p \in P_{2n+1}$ erfülle in den Nullstellen von p_{n+1} Hermitesche Interpolationsbedingungen. Zeigen Sie für $f \in C^{2n+2}(I)$:

$$Q_n(f) = Q_n(p) = I(p).$$

c) Folgern Sie daraus, dass für einen Zwischenwert $\xi \in I$ gilt:

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} \left(p_{n+1}, p_{n+1}\right)_w .$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Romberg–Integration) (4 Punkte)
Zu $f \in C([a,b])$, $N \in \mathbb{N}$, $h \in \frac{b-a}{N}$ ist die zusammengesetzte Trapezregel gegeben durch

$$a(h) := \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh).$$

Die Folge $(a(h))_{h\to\infty}$ approximiert das Integral $\int_a^b f(x)dx$ (Romberg–Integration).
Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson–Extrapolation eine Näherung von $a(0)$, indem Sie die Folge $h_k := (b-a)2^{-k}$, d.h. $N_k = 2^k$, und $q = 2$ verwenden.
Schreiben Sie dazu ein Programm zur Berechnung von a_{jn}, $j = 0, \dots, k$, $n = 0, \dots, j$.
Legen Sie zwei Vektoren A_0, A_1 der Länge k an und berechnen Sie a_{kn} zeilenweise, indem Sie nur die Werte der aktuellen Zeile a_{kn} und der vorherigen Zeile $a_{k-1,n}$ speichern.
Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen von k.

b) Berechnung des Ergebnisses.

c) Ausgabe von a_{j0}, a_{jj}, $|a_{j0} - a(0)|$, $|a_{jj} - a(0)|$ für $j = 0, \dots, k$.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 1$ und $k = 5$.