Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 18.11.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 6

Abgabe: 25.11.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Gauß–Elimination für tridiagonale Matrizen) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h.

$$A = \text{tridiag}(b_i, a_i, c_i) := \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Es gelte

$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1| > 0, \\ |a_i| &\geq |b_i| + |c_i|,\ b_i \neq 0,\ c_i \neq 0,\ 2 \leq i \leq n-1, \\ |a_n| &> |b_n| > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Die durch $\alpha_1 := a_1,\ \gamma_1 := c_1\alpha_1^{-1}$ und $\alpha_i := a_i - b_i\gamma_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$, $\gamma_i := c_i\alpha_i^{-1}$ für $2 \leq i \leq n-1$ definierten Zahlen genügen den Ungleichungen:

$$|\gamma_i| < 1,\ 1 \leq i \leq n-1,$$

$$0 < |a_i| - |b_i| < |\alpha_i| < |a_i| + |b_i|,\ 2 \leq i \leq n.$$

b) A besitzt die LR–Zerlegung $A = LR$ mit $L =$tridiag$(b_i, \alpha_i, 0)$, $R =$tridiag$(0, 1, \gamma_i)$.

c) A ist regulär.

d) Die Anzahl der arithmetischen Operationen zur Berechnung der Zerlegung $A = LR$ und zur Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe dieser Zerlegung ist $\mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 2 (B-Splines) (1+3+4 Punkte)

Für eine Knotenfolge $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $t_i \le t_{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} t_i = -\infty$ seien für $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ die B-Splines $B_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} B_{i0}(x) &:= \begin{cases} 1, & \text{für } t_i \le x < t_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ B_{ik}(x) &:= \omega_{ik}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x), \end{aligned}$$

wobei $\omega_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{für } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Für die folgenden Aufgaben sei die Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ streng monoton wachsend.

a) Berechnen und skizzieren Sie $B_{i1}, B_{i+1,1}$ und B_{i2}.

b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

   i) $B_{ik}|_{[t_j,t_{j+1})} \in \mathbb{P}_k$,

   ii) $\operatorname{supp}(B_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$,

   iii) $B_{ik} \ge 0, \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{ik}(x) = 1$ (Zerlegung der Eins).

c) Sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ Knotenfolge mit $t_i < t_{i+1}$ für alle i. Zeigen Sie:

   i) Für $k \ge 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} B_{ik}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

   ii) $B_{ik} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \ge 1$.

   Hinweis: Verwenden Sie für i), dass für $k > 1$ gilt

$$\frac{\omega_{ik}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{\omega_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}, \frac{1 - \omega_{ik}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} = \frac{1 - \omega_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}.$$

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe: Spline Interpolationsfehler/EOC) (4 Punkte)

Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta := \{0 = x_0 < \ldots < x_n = 1\}$ und $s \in S_\Delta^{1,0}$ der lineare Interpolierende Spline von f auf $[0,1]$.

a) Wir definieren als Approximation für den $\|\cdot\|_\infty$-Fehler für $m \in \mathbb{N}, m > 2$:

$$e_{\Delta,m} := \max_{x\in\Delta_m} |f(x) - s(x)|,$$

   wobei Δ_m das m-fach unterteilte Gitter Δ bezeichnet, d.h. $\Delta_m := \Delta \cup \{x_i + r(x_{i+1} - x_i)/m) | i = 0, \ldots, n-1, r = 1, \ldots, m-1\}$. Schreiben Sie eine Routine, die die Stützstellen Δ und den Unterteilungsgrad m als Eingabe bekommt, und den Fehler $e_{\Delta,m}$ berechnet.

b) Bestimmen Sie den Fehler $e_{\Delta,m}$ für $m = 10$, $x_k = k/n, k = 0, \dots, n$ und $n = 1, 3, 7, 15, 31, 63$. Wiederholen Sie dies für die Knotenwahl $x_k = (k/n)^4$.

c) Seien Δ und Δ' zwei Mengen von Interpolationspunkten mit unterschiedlicher Anzahl von Punkten $|\Delta| \neq |\Delta'|$. Hiermit definieren wir die experimentelle Konvergenzordnung (*Experimental Order of Convergence*) des Interpolationsfehlers als

$$EOC(\Delta, \Delta') := \frac{\ln(e_{\Delta,m}/e_{\Delta',m})}{\ln(|\Delta|/|\Delta'|)}.$$

Berechnen Sie diese Größe für alle aufeinanderfolgenden Glieder obiger n-Sequenz.

Hinweis: Man kann zeigen, dass für die erste Knotenwahl aus b) gilt $\|f - s\|_\infty \geq \frac{1}{4} n^{-1/2}$ und für die zweite Knotenwahl $\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{2} n^{-2}$.