Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen 11.11.2010

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 5

Abgabe: 18.11.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Schnelle Fourier–Transformation) (4+2+2 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) := x$.

a) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, das komplexe trigonometrische Interpolationspolynom $t^*(x)$ zu $f(x) := x$ auf $[0, 2\pi)$ mittels schneller Fourier–Transformation.

b) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $t(x)$ zu $f(x) := x$ auf $[0, 2\pi)$.

c) Vergleichen Sie die Polynome $t(x)$ und $Re(t^*(x))$ und fertigen Sie eine Skizze dieser Funktionen an (oder plotten sie diese Funktionen mit MATLAB).

Aufgabe 2 (Fourier–Transformation) (4 Punkte)
Sei $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $y_0, \ldots, y_n$ gegeben. $t_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{ijx}$ sei das komplexe trigonometrische Interpolationspolynom zu $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Sei

$$t_n^{\text{even}}(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{\text{even}} e^{ijx}$$

das Interpolationspolynom zu $(x_0, y_0), \ldots, (x_{2m}, y_{2m})$ und

$$t_n^{\text{odd}}(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{\text{odd}} e^{ijx}$$

das Interpolationspolynom zu $(x_0, y_1), \ldots, (x_{2m}, y_{2m+1})$.
Zeigen Sie, dass gilt

$$t_n^*(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\cdot(m+1)x})\, t_n^{\text{even}}(x) + \frac{1}{2}(1 - e^{i\cdot(m+1)x})\, t_n^{\text{odd}}(x - \frac{\pi}{m+1}).$$

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe: DFT) (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{P}_n := \{f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} |\ f_k \in \mathbb{C}, f_{k+n} = f_k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der n-periodischen komplexen Zahlenfolgen. Mit $\omega_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ sei die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $F_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definiert durch

$$(F_n f)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} f_k$$

(vergleiche auch Blatt 4, Aufgabe 3). Wegen der Periodizität von $\mathcal{P}_n$ kann für $f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{P}$ die DFT $g = (g_k)_{k=-\infty}^{\infty} := F_n f$ kompakt als Matrixgleichung mit einem $M_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie eine Routine, die zu $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Matrix M_n bestimmt (oder alternativ die reellen Matrizen $\mathrm{Re}(M_n)$ und $\mathrm{Im}(M_n)$).

b) Geben Sie die Matrizen ihrer Routine für $n = 2, 4, 8$ an. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten $M_n v$ für

$$v = (1,0,0,0,0,0,0,0)^T, (1,0,0,0,1,0,0,0)^T, (1,0,1,0,1,0,1,0)^T.$$