Institut für Numerische und Angewandte Mathematik — 4.11.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 4

Abgabe: 11.11.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Fehlerabschätzung) (4 Punkte)
Der Streckenzug $s(x)$ interpoliere $f(x) = \ln(x)$ in den äquidistanten Knoten $x_i = 2 + ih$, $h = 1/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, d.h.,

$$s(x) = (1 - t) \cdot \ln(x_i) + t \cdot \ln(x_{i+1}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad t = (x - x_i)/h.$$

Bestimmen Sie ein möglichst kleines n so, dass

$$\max_{2 \leq x \leq 3} |s(x) - \ln(x)| \leq 10^{-3}.$$

Aufgabe 2 (Trigonometrische Polynome) (4 Punkte)
Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k,\, f_k) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k := 2\pi\frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Es sei $p(x) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom. Für $s \leq n-1$ sei

$$p_s := \sum_{j=0}^{s-1} c_j e^{ijx}.$$

Zeigen Sie: Unter allen trigonometrischen Polynomen $q_s \in T_{s-1}$ $(0 \leq s \leq n-1)$ minimiert gerade p_s die Fehlerquadratsumme

$$s(q_s) := \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q_s(x_k)|^2.$$

Aufgabe 3 (Faltungssatz) (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{P}_n := \{f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} |\ f_k \in \mathbb{C}, f_{k+n} = f_k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der n-periodischen komplexen Zahlenfolgen. Auf $\mathcal{P}_n$ seien zwei Multiplikationen definiert durch

$$\begin{aligned} f \cdot g &:= (f_k g_k)_{k=-\infty}^{\infty} && \text{(Hadamard Produkt)}, \\ f * g &:= \Big(\sum_{l=0}^{n-1} f_l g_{k-l}\Big)_{k=-\infty}^{\infty} && \text{(Faltung)}. \end{aligned}$$

Mit $\omega_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ sei ferner die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $F_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definiert durch

$$(F_n f)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} f_k.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{P}_n$ ist ein n-dimensionaler linearer Raum und F_n ist linear.

b) F_n ist bijektiv und $F_n^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ ist gegeben durch $F_n^{-1} = \frac{1}{n}\bar{F}_n$, wobei

$$(\bar{F}_n f)_j := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-jk} f_k \qquad \text{(konjugierte DFT)}.$$

c) Sind $f, g \in \mathcal{P}_n$, so ist

$$\begin{aligned} F_n(f \cdot g) &= \frac{1}{n} F_n f * F_n g, \\ F_n(f * g) &= F_n f \cdot F_n g. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Hermite Interpolation) (4 Punkte)

a) Zu gegebenen Stützstellen $x_i, i = 0, \ldots, n$ und einer Matrix von Zielwerten $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times d}$ ist das Hermite-Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_{d(n+1)-1}$ mit $p^{(j)}(x_i) = c_{(i+1)(j+1)}$ eindeutig definiert. Dieses lässt sich in der Newton-Form zu den Stützstellen $(z_i)_{i=0}^{d(n+1)-1}$ mit $z_{di+j} := x_i$ für $j = 0, \ldots, d-1, i = 0, \ldots, n$ ausdrücken. Schreiben Sie eine Routine, die die Koeffizienten der Newton-Form bestimmt.

b) Wenden Sie ihre Routine an, um zu den Daten

$$(x_i)_{i=0}^{4} = (-2, -1, 0, 1, 2), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

die Koeffizienten des Interpolationspolynoms zu bestimmen.