Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 28.10.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 3

Abgabe: 4.11.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Richardson Extrapolation) (4 Punkte)
Gegeben seien $h_k := 2^{-k}$, $a(h) := \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$, $f(h) := \frac{1-h}{2+h}$. Dann approximiert die Folge $(a(h_k))_{k\to\infty}$ die Ableitung $f'(0)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson Extrapolation eine Näherung der Ableitung $f'(0)$ für $k = 0, 1, 2$ mit $q = 1$ und $q = 2$. Geben Sie dazu alle Werte a_{kn}, $n = 0, \dots, k$ an (Neville Schema). Vergleichen Sie die Ergebnisse für $q = 1$ und $q = 2$.

Aufgabe 2 (Trigonometrische Funktionen) (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Für $\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gilt: $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^{k-l})^j = \delta_{kl}$ für $0 \le k, l \le n-1$.

b) Seien $n, j \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $x_k := k\frac{2\pi}{n+1}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(jx_k) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(jx_k) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } j \text{ durch } n+1 \text{ teilbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hinweis: Verwenden Sie a) zum Beweis von b).

Aufgabe 3 (Trigonometrische Funktionen) (4 Punkte)

a) Seien $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ gegebene reelle Folgen. Setze $b_0 = 0$, $a_{-k} = a_k$, $b_{-k} = -b_k$ und $c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

b) Seien $(c_k)_{k=-m}^{m}$, $c_k \in \mathbb{C}$ gegeben. Setze $a_k := c_k + c_{-k}$, $b_k := i(c_k - c_{-k})$, $k = 0, \dots, m$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Interpolation) (4 Punkte)

Es sei $I := [-5, 5]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Interpolationsstellen x_i, $i = 0, \dots, n$ definiert durch

$$\begin{aligned} \text{(A) } x_i &:= 5(-1 + \frac{2i}{n}), \\ \text{(B) } x_i &:= 5 \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right). \end{aligned}$$

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu den Daten $(x_i,\ f_i := f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ und gegebenem x den Wert $p_n(x)$ des Interpolationspolynoms mit dem Neville–Schema berechnet. Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen von n, x und Abfrage, welche Interpolationsstellen ((A) oder (B)) verwendet werden sollen.

b) Berechnung des Ergebnisses.

c) Ausgabe des Ergebnisses und des absoluten Fehlers $f(x) - p_n(x)$.

Testen Sie Ihr Programm mit $x = 4.63$ und folgenden Eingaben:

n	10	10	50	50	100	100
Interpolationsstellen nach	(A)	(B)	(A)	(B)	(A)	(B)