Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

21.10.2010

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 2

Abgabe: 28.10.2010, vor der Vorlesung
Am 1.11. (Allerheiligen) finden keine Übungen statt. Die Besprechung dieses (und des nächsten) Aufgabenblattes daher erst am 8.11.

Aufgabe 1 (Neville Schema) (4 Punkte)
Verwenden Sie die Polynominterpolation zur Berechnung von $\sqrt{7}$, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stellen $x = 1$, 4 und 9 interpolieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Berechnen Sie die dividierten Differenzen und stellen Sie damit die Newton-Form des Interpolationspolynoms auf. Werten Sie das Polynom an der Stelle $x = 7$ aus.

b) Berechnen Sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$ mit Hilfe des Neville Schemas.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Neville Schemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$ für den Fall, dass Sie eine weitere Stützstelle hinzunehmen, d.h. $x = 1$, 4, 9 und 16.

Aufgabe 2 (Dividierte Differenzen) (4 Punkte)
Sei $f \in C^0(a, b)$, $x_0, ..., x_n \in (a, b)$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie:

a) Die dividierte Differenz $f[x_0, ..., x_n]$ ist eine symmetrische Funktion, d.h. für jede Permutation $\pi : \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n\}$ gilt $f[x_{\pi(0)}, ..., x_{\pi(n)}] = f[x_0, ..., x_n]$.

b) Sei $t \neq x_k$, $k = 0, ..., n$ fest gewählt und p das Interpolationspolynom von f an den Stellen $x_0, ..., x_n$. Dann gilt $f(t) - p(t) = f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$.

Aufgabe 3 (Polynomiale Interpolation in 2D) (4 Punkte)
An den Stützstellen $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{x}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1)^T, \mathbf{x}_3 = (1, 1)^T$ seien die Werte $z_0 = z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es kein lineares Polynom $p(x, y)$ gibt, welches die Werte z_i in den Punkten $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$ für $i = 0, \dots, 3$ annimmt.

b) Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x, y)$, das die Werte z_i in den Punkten $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$ für $i = 0, \ldots, 3$ annimmt und erfüllt:

$$p_{|[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1]}, p_{|[\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]}, p_{|[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_2]}, p_{|[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]} \in \mathbb{P}_1.$$

Hierbei bezeichnet $[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \{\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' | \alpha \in [0, 1]\}$ die Strecke zwischen $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$.

c) Zeigen Sie, dass p eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Newton-Form) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Routine, die zu vorgegebenen Stützstellen $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und Funktionswerten $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Koeffizienten $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n)^T$ des Interpolationspolynoms $p \in \mathbb{P}_n$ in der Newton-Form bestimmt. Schreiben Sie eine Routine, die das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützstellen $\mathbf{x}$ und Koeffizienten $\mathbf{a}$ in beliebigen Punkten $x \in \mathbb{R}$ auswertet.

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p(x)$ bzw. $\bar{p}(x)$ zu den Stützstellen $\mathbf{x} = (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)^T$ bzw. $\bar{\mathbf{x}} = (-5, -4.5, -4, -3, -1.5, 0, 1.5, 3, 4, 4.5, 5)^T$. Visualisieren Sie f, p und $\bar{p}$.