Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen 14.10.2010

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Blatt 1

Abgabe: 21.10.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Polynom-Interpolation) (4 Punkte)
Seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 0, 1, 2$ gegeben mit $y_1 < y_0, y_1 < y_2, x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_2$ ein eindeutig bestimmtes Minimum in einem Punkt x_* hat.

b) Geben Sie eine Formel für x_* an und zeigen Sie, dass gilt $|x_* - x_1| \leq \frac{h}{2}$.

Aufgabe 2 (Hermite-Interpolation) (4 Punkte)
Seien $x_1 < x_2 < x_3, f \in C^4([x_1, x_3])$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein Polynom p vom Grad ≤ 3 mit der Eigenschaft

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \quad \text{und} \quad p'(x_2) = f'(x_2).$$

b) Für alle $x \in [x_1, x_3]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{4!} |\omega(x)|$$

wobei $\omega(x) := (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$.

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, dass für $x \neq x_i$ die Funktion $h(z) := f(z) - p(z) - \frac{f(x)-p(x)}{\omega(x)}\omega(z)$ vier Nullstellen hat, darunter eine mehrfache.

Aufgabe 3 (Birkhoff-Interpolation) (4 Punkte)
Finden Sie ein Polynom minimalen Grades, so dass

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p'(1/2) = 2$$

ist (mit Begründung der Minimalität).

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Numerische Integration) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine zur numerischen Approximation eines Integrals
$$I = \int_a^b f(x)dx$$
mit Hilfe der Mittelpunktregel aus Aufgabe 2 des Anwesenheitsblattes. Verwenden Sie die äquidistanten Gitterpunkte $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$. Als Argumente sollten dieser Routine die Funktion f, die Integrationsgrenzen a, b und die Anzahl N übergeben werden. Zurückgegeben wird der Näherungswert $\tilde{I}(h)$.

b) Testen Sie Ihr Programm anhand des Integrals
$$I = \int_0^\pi \sin(x)dx.$$
Sei $E(h) = |I - \tilde{I}(h)|$ der Approximationsfehler zur Schrittweite $h > 0$. Die Fehlerordnung eines Verfahrens lässt sich numerisch ermitteln durch die Formel
$$\frac{|\ln E(2h) - \ln E(h)|}{\ln 2}.$$
Werten Sie diese Formel für veschiedene Schrittweiten $h > 0$ aus und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Ordnung, welche sich analytisch durch Taylor-Entwicklung ergibt (siehe Anwesenheitsübung, Aufgabe 2b).