Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 18.10.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

# Numerische Analysis

Wintersemester 2010/2011 — Anwesenheitsübung

**Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz)**
Sei $X$ ein Banachraum, $D \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $F : D \to D$ eine Kontraktion. Zeigen Sie:

a) $F$ hat genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$.

b) Sei $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots . \Rightarrow x_k \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

c) $\|\bar{x} - x_k\| \leq L\|\bar{x} - x_{k+1}\|$.

d) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|F(x_0) - x_0\|$.

e) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|$.

**Aufgabe 2 (Taylor-Entwicklung)**
In der numerischen Mathematik spielt die Approximation eines bestimmten Integrals

$$I := \int_a^b f(x)dx,$$

auch *Quadratur* genannt, eine wichtige Rolle. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Häufig lässt sich ein Integral nicht (oder nur sehr schwer) analytisch lösen, so dass man auf numerische Näherungsverfahren angewiesen ist. Solche Verfahren lernen sie im Laufe dieser Vorlesung kennen.

a) Es sei $a = 0$, $b = 1$. Ein sehr einfacher Ansatz zur numerischen Approximation des Integrals $I$ ist der folgende: Man betrachtet eine äquidistante Unterteilung

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1,$$

mit $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = \frac{1}{N}$, und definiert die stückweise konstante Treppenfunktion $f_h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_h(x) := f(x_i) \quad \text{für alle } x \in [x_i,\, x_{i+1}),\ i = 0, \ldots, N-1.$$

Das Integral von $f_h$, welches sich sehr einfach berechnen lässt, dient nun der Approximation des gesuchten Integrals $I$, d.h.

$$I \approx \tilde{I}(h) := \int_0^1 f_h(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} h \cdot f(x_i).$$

Bestimmen Sie die Ordnung dieses Näherungsverfahrens mit Hilfe der Taylor-Entwicklung.

b) Welche Ordnung ergibt sich, wenn man zur Approximation statt der Funktionswerte von $f$ in den linken Intervallgrenzen die Funktionswerte in den Mittelpunkten

$$x_{i/2} := \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}),$$

benutzt? Auf diesem Ansatz basiert die *Mittelpunktregel*

$$\tilde{I}(h) := \sum_{i=0}^{N-1} h \cdot f(x_{i/2}).$$