Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

29. Juni 2017

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

SoSe 2017 — Blatt 9

Abgabe: Do. 6. Juli 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lineare Mehrschrittverfahren) (4 Punkte)

Gegeben sei ein Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0$.

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = h(4f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 2f(t_k, y_k))$$

die Konsistenzordnung 3 hat. Ist das Verfahren nullstabil?

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$y_{k+3} - y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 0$$

konsistent ist, obwohl es nicht von der Differentialgleichung abhängt!

Aufgabe 2 (Begleitmatrix eines Polynoms) (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

(b) Die Dimension des Eigenraums zu jedem Eigenwert von A ist 1.

Aufgabe 3 (Charakteristisches Polynom) (4 Punkte)

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ Nullstellen des Polynoms ρ zu (DG_k) mit Vielfachheit $m_1, \ldots, m_m$ und $\sum_{i=1}^m m_i = k$. Zeigen Sie, dass dann aus $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, u_n = \sum_{i=1}^m p_i(n)\lambda_i^n, n \in \mathbb{N}_0, p_i \in \mathbb{P}_{m_i-1}$ für $i = 1, \ldots, m$ folgt, u ist eine Lösung von (DG_k).
Hinweis: Sie dürfen den ersten Teil den Beweises von Satz 3.52 verwenden.

Aufgabe 4 (Schrittweitensteuerung) (4 Punkte)

(a) Erweitern Sie Ihr Programm vom Übungsblatt 8, sodass Sie der Funktion `Runge-Kutta` zusätzlich einen Vektor `gamma_tilde` übergeben können und die zurückgegebene Verfahrensfunktion beide Ergebnisse des eingebetteten Runge-Kutta Verfahrens berechnet.
Hinweis: Eine Musterlösung zu der Programmieraufgabe von Blatt 8 ist online bereit gestellt.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `calculate_h`, die die optimale Schrittweite $\tilde{h}$ berechnet. Übergeben Sie dafür zwei Näherungen v_1, v_2 aus einem eingebetteten Runge-Kutta Verfahren, die dafür verwendete Schrittweite h, eine Schranke für den Fehler η sowie die Ordnungen des Verfahrens p, q.

$$\tilde{h} = h \sqrt[p]{\frac{h\eta(1 - h^{q-p})}{|v_1 - v_2|}}$$

(c) Implementieren Sie folgenden Pseudocode zur Schrittweitensteuerung:

Input: $I = [a, b], y_0, \phi, h_0, \eta, \mu$
  $i = 0$
  $h = h_0$
  while $y_i < b$ **do**
    $v_1, v_2 = \phi(x_i, y_i, h)$
    $\tilde{h} =$ `calculate_h`$(v_1, v_2, h, \eta, p, q)$
    if $\tilde{h} > h$ **then**
      $i = i + 1$
      $x_i = x_{i-1} + h$
      $y_i = v_2$
    end if
    $h = \mu\tilde{h}$
  end while
Output: $(x_i)_i, (y_i)_i$

μ ist ein Sicherheitsfaktor, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen im nächsten Schritt die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

(d) Testen Sie das Verfahren, an der Differentialgleichung $y' = -5y, y(0) = 1$ für $\eta \in \{0.01, 0.005, 0.001, 0.0005\}$, $\mu = 0.9$. Starten Sie mit der Schrittweite $h_0 = 0.01$. Verwenden Sie das folgende eingebettete Runge-Kutta Verfahren der Ordnungen 2 und 3:

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
\gamma & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\hline
\tilde{\gamma} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

Plotten Sie den Fehler $|y_h(x) - e^{-5x}|$ für alle η in ein Koordinatensystem.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an `thomasbuddenkotte@freenet.de`. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.