Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier 14. Juni 2017

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

SoSe 2017 — Blatt 7

Abgabe: Do. 22. Juni 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Stabilität) (4 Punkte)

Betrachten Sie das AWP $y' = -y(1+y), y(0) = y_0$ mit $y_0 > 0$ und setzten Sie die eindeutige Lösbarkeit voraus.

(a) Zeigen Sie, ohne die analytische Lösung zu bestimmen, dass die Lösung monoton fallend ist und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ erfüllt.

(b) Sei die Folge $\{u_j\}_j$ durch das explizite Euler-Verfahren $u_{j+1} = (1-h)u_j - hu_j^2$ gegeben. Unter welchen Bedingungen an h ist die Folge monoton fallend und erfüllt $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$?

(c) Sei $\{u_j\}_j$ durch das implizite Euler-Verfahren $u_{j+1} = u_j - h(u_{j+1} + u_{j+1}^2)$ gegeben, wobei u_{j+1} diejenige Lösung sei, die für $h \to 0, (h > 0)$ gegen u_j konvergiert. Unter welchen Bedingungen an h existiert diese Lösung, ist die Folge $\{u_j\}_j$ monoton fallend und erfüllt $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$?

Aufgabe 2 (Taylor-Verfahren) (2 Punkte)

Die Verfahrensfunktion für das Taylor-Verfahren der Ordnung p ist gegeben durch

$$\varphi_p(x, u(x), h) := f(x, u(x)) + \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, u(x))) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{p!}\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}x^{p-1}} f(x, u(x)).$$

Sei $f \in C^p(S)$ mit $p \in \mathbb{N}$ und Φ_p das Taylor-Verfahren der Ordnung p mit Verfahrensfunktion φ_p. Für das Verfahren gelte $|e_0| = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \to 0$. Zeigen Sie: Φ_p ist konvergent mit Ordnung p.

Aufgabe 3 (Stabilität des Crank-Nicolson-Verfahren) (2 Punkte)

Für $\theta \in [0, 1]$ ist das θ-Verfahren gegeben durch

$$y_j = y_{j-1} + h(\theta f(x_j, y_j) + (1-\theta) f(x_{j-1}, y_{j-1})).$$

Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das Crank-Nicolson-Verfahren. Berechnen Sie den Stabilitätsbereich des Crank-Nicolson-Verfahrens. Ist das Verfahren A-Stabil?

Aufgabe 4 (Einschrittverfahren und Quadratur) (4 Punkte)

Gegeben sei das explizite Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k, h)$$

mit der Verfahrensfunktion

$$\varphi(t, y, h) = \sum_{r=1}^{R} c_r k_r, \; k_r = f(t + a_r h, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s).$$

Zeigen Sie: Ist $\sum_{r=1}^{R} c_r = 1$ und ist das Verfahren konsistent von der Ordnung q, so hat die Quadraturformel

$$Q(g) := \sum_{r=1}^{R} c_r g(a_r) \approx \int_0^1 g(x)dx$$

mindestens den Exaktheitsgrad $q - 1$ (Hinweis: Betrachten Sie das Anfangswertproblem $y'(t) = t^n$, $y(0) = 0$ für ein $n \leq q - 1$).

Aufgabe 5 (Programmieraufgabe: θ-Verfahren) (4 Punkte)

(a) Machen Sie sich mit der Funktion `scipy.optimize.newton` vertraut. Lösen Sie mit dessen Hilfe die nicht-lineare Gleichung $\sin(x) = 0$ mit Startwert $x_0 = 2$. Verwenden Sie dabei auch die Ableitung (`fprime`).

(b) Implementieren Sie das θ-Verfahren. Verwenden Sie für die Lösung der resultierenden Gleichung `scipy.optimize.newton`.

(c) Plotten Sie das Ergebnis des Verfahrens für $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ der Dahlquist Gleichung $y' = \lambda y$ mit $\lambda = -11, I = [0, 2], y_0 = 1$ und $h = 0.2$. Probieren Sie auch andere Werte aus. **Bemerkung:** Die aus dem Dahlquist-Problem resultierende Gleichung ist linear. Wenn Sie Ihr Programm an einer nicht-linearen Gleichung testen wollen, können Sie die ODE aus Aufgabe 1 verwenden.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an `thomasbuddenkotte@freenet.de`. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.