
Übung zur Vorlesung
Numerische Analysis
SoSe 2017 — Blatt 6

Abgabe: Mi. 14. Juni 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lösung des Anfangswertproblems) (4 Punkte)

Sei $I := [a, b]$, $G \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und offen, $y_0 \in G$ und sei $f \in C^0(S, \mathbb{R}^n)$ mit $S := I \times G$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

- (a) $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ löst das AWP.
- (b) $y \in C(I, G)$ und $y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s)) \, ds$.

Aufgabe 2 (Picard-Lindelöf) (4 Punkte)

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 1 und zusätzlich erfülle f die Bedingung $\|f(x, y)\| \leq M$, $M > 0$, für alle $(x, y) \in S$ sowie die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \forall (x, y), (x, z) \in S.$$

Sei $y_0 \in G$ gegeben, so dass für ein $\sigma \geq M(b - a)$ gilt: $H := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| < \sigma\} \subset G$. Zeigen Sie, dass dann gilt

- (a) Das AWP hat auf I genau eine Lösung \hat{y} .
- (b) Für alle $x \in I$ gilt: $(x, \hat{y}(x)) \in K_M(a, y_0) \cap S$, wobei $K_M(a, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq M|a - x|\}$.

Aufgabe 3 (Konsistenz des verbesserten Euler-Verfahrens) (4 Punkte)

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 1 und sei außerdem f beliebig glatt. Zeigen Sie, dass die Verfahrensfunktion $\varphi(x, y, h) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y)))$ des verbesserten Euler-Verfahrens konsistent mit Konsistenzordnung 2 ist.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Explizites Euler-Verfahren)

(4 Punkte)

Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren für das AWP

$$y'(x) = y(x) \qquad y(0) = 1$$

auf $I = [0, 2]$, in Abhängigkeit von der Schrittweite h .

Plotten Sie die Ergebnisse für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ und die analytische Lösung in ein Koordinatensystem.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an `thomasbuddenkotte@freenet.de`. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.