
Übung zur Vorlesung
Numerische Analysis
SoSe 2017 — Blatt 5

Abgabe: Do. 1. Juni 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Zusammengesetzte Trapez- und Simpsonregel) (4 Punkte)

Gesucht sei das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 2} dx.$$

- (a) Konstruieren Sie, analog zur zusammengesetzten Trapezregel aus der Vorlesung, die zusammengesetzte Simpsonregel.
- (b) Bestimmen Sie eine Näherung des Integrals $I(f)$ mit der Trapez- und Simpsonregel und vergleichen Sie mit dem exakten Wert von $I(f)$.
- (c) Bestimmen Sie eine Näherung des Integrals $I(f)$ mit der zusammengesetzten Trapez- und Simpsonregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$. Vergleichen Sie erneut mit dem exakten Wert von $I(f)$.

Aufgabe 2 (Gaußsche Quadraturformeln) (4 Punkte)

- (a) Sei $p \in \mathcal{P}^{2n+1}$ das eindeutig bestimmte Polynom mit $p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i)$ für ein $f \in \mathcal{C}^{2n+2}(a, b), i = 0, \dots, n$. x_0, \dots, x_n seien die Nullstellen von p_{n+1} und Q_n die zugehörige Gaußsche Quadraturformel. Zeigen Sie:

$$Q_n(f) = Q_n(p) = I(p)$$

- (b) Zeigen Sie: Aus (a) folgt, dass für einen Zwischenwert $\xi \in (a, b)$ gilt:

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle_\omega$$

Aufgabe 3 (Restgliedabschätzung für die Simpsonregel)

(4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $a < b$. Sei $S(f)$ die Simpsonregel zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x) dx$.

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Restgliedgleichung für ein $\xi \in (a, b)$ gilt:

$$I(f) - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

- (b) Seien äquidistante Stützstellen $x_i = a + ih$ mit $i = 0, \dots, N$ und geradem $N \in \mathbb{N}$ sowie der Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$ gegeben. Das Intervall $[a, b]$ wird nun in $n = \frac{N}{2}$ gleich große Teilintervalle $[x_i, x_{i+2}]$ mit Mittelpunkt x_{i+1} und Länge $2h$ unterteilt. Zeigen Sie, dass für die zusammengesetzte Simpsonregel $S_h(f)$

$$|I(f) - S_h(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

gilt.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Quadraturregeln)

(4 Punkte)

- (a) Implementieren Sie die folgenden Quadraturregeln auf dem Einheitsintervall $[-1, 1]$:
- (i) Trapezregel
 - (ii) Simpsonregel
 - (iii) 2-Punkt-Gauß-Quadratur
- (b) Implementieren Sie eine Funktion **transform**, die die Koordinatentransformation verwendet um einen gegebene Quadraturregel auf ein gegebenes Intervall zu transformieren.
- (c) Implementieren Sie eine Funktion **zusammengesetzteQR**, welche eine Funktion f , Intervallgrenzen a, b , eine der Funktionen aus (a) sowie eine Zahl n übergeben bekommt und die dazugehörige zusammengesetzte Quadraturregel auf n Teilintervallen berechnet.
- (d) Testen Sie die Quadraturregeln als auch die zusammengesetzten Quadraturregeln an der Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vergleichen Sie auch die Ergebnisse mit denen der Programmieraufgabe von Blatt 3. Geben Sie jeweils den Fehler $|I(f) - Q(f)|$ aus.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an **thomasbuddenkotte@freenet.de**. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.