Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

11. Mai 2017

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

SoSe 2017 — Blatt 3

Abgabe: Do. 18. Mai 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Hermite Interpolation) (4 Punkte)

Seien $f \in \mathcal{C}^{n+1}(a,b)$ und $a \leq x_0 \leq \ldots \leq x_m \leq b$. Mit $m_0, \ldots, m_m \in \{1, \ldots, n+1\}$ und $n+1 = \sum_{j=0}^{n} m_j$. Sei $p_n \in P^n$ das Hermite Interpolationspolynom zu den Daten

$$\begin{gathered}(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_0, f^{(m_0-1)}(x_0)) \\ \vdots \\ (x_m, f(x_m)), \ldots, (x_m, f^{(m_m-1)}(x_m)).\end{gathered}$$

Zeigen Sie: $\forall x \in [a,b], \exists \xi_x \in [a,b]$ mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{m_k}.$$

Aufgabe 2 (Richardson Extrapolation) (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Näherung für die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ bei $x = 0$ mit gegebener Folge $x_k = 2^{-k}$ bis $k = 2$. Wählen Sie $a(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2x}$ und nutzen Sie die Richardson Extrapolation.

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Einheitswurzeln) (4 Punkte)

Sei $\omega_k := e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) $\langle E_k, E_l \rangle = \delta_{kl}$, wobei $E_k(x) := e^{ikx}$ und $\langle a, b \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a\bar{b} \, \mathrm{d}x$

(b) $\omega_k^{n+1} = 1$

(c) $\omega_l^k = \omega_k^l$

(d) $\omega_{n+1-k}^l = \omega_{-k}^l$

(e) $\omega_k^{-l} = \bar{\omega}_k^l$

(f) $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \omega_j^{k-l} = \delta_{kl}$ für $0 \leq k, l \leq n$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Richardson-Extrapolation) (4 Punkte)

Sei $f \in C(a, b)$ gegeben. Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ kann numerisch mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel wie folgt approximiert werden:

$$T(h_k) = h_k(b-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{1}{h_k}-1} f(a + jh_k(b-a))\right)$$

(a) Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel.
Hinweis: Sie können einer Funktion auch Funktionen als Parameter übergeben.

(b) Implementieren Sie die Richardson-Extrapolation für $h_k = 2^{-k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, um mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel eine Approximation $R_n(f)$ an

$$T(0) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Verwenden Sie für die Polynom Auswertung das Neville-Schema.

(c) Testen Sie Ihre Implementierung für $f(x) = \cos(x), a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$ und untersuchen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit für $n = 1, \ldots, 8$. Plotten Sie den Betrag des Fehlers, skalieren Sie die y-Achse logarithmisch.

(d) Bestimmen Sie numerisch für $n = 1, \ldots, 8$ das kleinste k, sodass $|T(h_k) - T(0)| \leq |R_n(f) - T(0)|$ gilt.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an `thomasbuddenkotte@freenet.de`. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.