

# 0 Einleitung

Ziel: Analyse numerischer Verfahren  
anhand von Differentialgleichungen  
(DGLen)

## Def 0.1

"Gewöhnliche DGL" ist eine Beziehung der Form

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots) = 0$$

für Funktion  $u = u(t)$

(reelle) Variable  $t$

Ableitung  $u'(t) = \frac{du}{dt}$   
 $u''(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$   
 $\vdots$

→ "gewöhnlich"  $\Leftrightarrow u$  hängt  
nur von einer Variable ab!

Eine  $g$ DGL der Form

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

heißt "explizit"

→ das sind für uns die relevanten!

## Bsp 0.2 $u'(t) = 0$

mit allgemeiner Lösung  $u(t) = c$  (Konstante)

→ Zusatzbed. notwendig um Eindeutigkeit zu  
erlangen

→ Meistens durch Angabe von Anfangsbedingungen <sup>②</sup>  
 $u(0) = u_0$

Bsp 0.3  $u'(t) = u(t)$ ,  $u(0) = 1$ ,  $t > 0$  (0.1)

→ Exponentialfunktion  $u(t) = e^t$

„klassisches“ Beispiel einer

Aufangswertaufgabe

Da (0.1) nur erste Ableitungen enthält spricht man von einer

DGL erster Ordnung

Bsp 0.4  $u''(x) = -g$ ,  $0 < x < 1$

beschreibt DGL zweiter Ordnung

und benötigt zwei weitere Bedingungen

z. B.  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$

Wir nennen dies Randwertproblem

Lösung: 

→  $u(x) = -\frac{1}{2} g (x-1)x$

Woher kommen solche Probleme?

0.1 Systeme von DGLen: math. Epidemiologie

1927 Kermak & McKendrick  
Modell für kurze Epidemien (z.B. Grippe)

a) Einteilung der Menschen:

S: susceptibles (Zufriedenbare)

I: infected (Infizierte)

R: removals (immun, gestorben, etc.)



b) Übergangsraten beschreiben Dynamik

$$f_1(S, I) = \alpha SI$$

$$f_2(I, R) = \beta I, \quad \alpha, \beta > 0$$

$f_1$ :  
• je mehr Infizierte, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit eines Zufriedenbaren sich zu infizieren  
• je mehr Zufriedenbare, desto höher die Rate

$f_2$ : mit einer gewissen Rate sterben/  
gewissen die Infizierten. ④

c) Modell: gekoppelte gew. D.Glen

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t)$$

$$R'(t) = \beta I(t)$$

und Anfangswerte

$$S(0) = S_0 > 0$$

$$I(0) = I_0 > 0$$

$$R(0) = 0$$



(5)

Wie kann man das Modell lösen?

→ 2014 Harto et. al.  
analytische Lösung

(eigentlich nicht analytisch lösbar)

Wie macht man es im einfacheren Fall?

- Annahme  $S \gg I$

→  $S$  konstant

$$\Rightarrow I'(t) = \alpha S I(t) - \beta I(t) \\ = (\alpha S - \beta) I(t)$$

d.h. Epidemie, wenn

$$\alpha S - \beta > 0$$

- Lösung  $I(t) = \int_{t_0}^t I'(t) dt$

$$= \int_0^t (\alpha S - \beta) I(t) dt + I_0$$
$$= I_0 e^{(\alpha S - \beta)t}$$

Numerische Lösung → Auswerten von Integralen

## 0.2 Variationsgleichungen und Galerkinapproximationen

Grundlegender Ansatz:

### Def 0.5 Energieminimierung

a) Physikalisches Prinzip:

Ein phys. System strebt in den Zustand minimaler Energie  $E$

b) Math. Äquivalenz:

Sei  $\bar{u}(x, t)$  Zustandsvariable.

$\bar{u}$  strebt gegen den optimalen Zustand

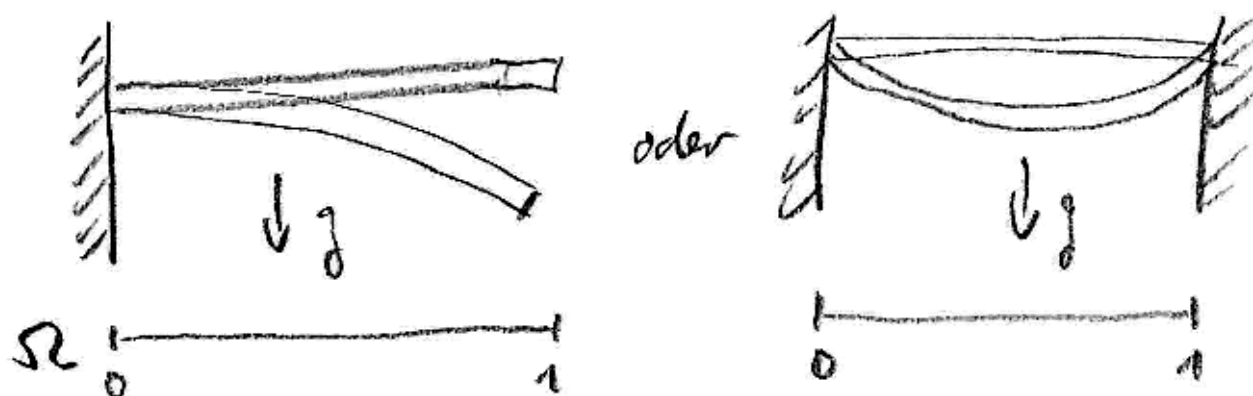
$u = u(x) = \underset{\bar{u}}{\operatorname{argmin}} E(\bar{u})$ . D.h. (falls  $E$  ausreichend glatt)

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon \varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

für beliebige zulässige Variationen  $\varphi$

7

# Bsp Elastizität eines Stabes



$u(x)$  Zustandsgröße, Auslenkung in  $y$ -Richtung

$$E(u) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 c u'^2 dx}_{\text{Verformungsenergie}} - \underbrace{\int_0^1 g u dx}_{\text{pot. Energie}}$$

Ansatz  $\frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon \varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 \frac{1}{2} c (u' + \varepsilon \varphi')^2 + f (u + \varepsilon \varphi) dx$$

$$= \int_0^1 c (u' + \varepsilon \varphi') \varphi' + f \varphi dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 c u' \varphi' + f \varphi dx = 0$$

Variationsproblem,  
(erfordert  $u$  stetig diffbar)

mit Hauptsatz der Variationsrechnung folgt <sup>⑧</sup>  
die DGI

$$-cu'' = f \quad \text{auf } (0,1)$$

+ RB

Galerkinansatz:

Gesucht ist  $u \in V$  (Funktionsraum der zulässigen Lösungen), so dass

$$(u', \varphi') = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V,$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das  $L^2$ -Skalarprodukt bezeichnet.

Discretisierung:

Wähle diskreten Raum  $V_h \subset V$  mit

Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ .

$$\text{d.h. } u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$$

diskretes Problem:

Finde  $u_h \in V_h$ , so dass

$$(u_h, \varphi_h) = (f, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

Testen mit allen Basisfunkt.  $\varphi_j, j=1 \dots N$

liefert LGS

$$\sum_{i=1}^N u_i (\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j)$$

Herausforderung immer Integration

→ zunächst die Frage nach numer. Integration,  
was wir auf Interpolation aufbauen  
werden.

# 1 Interpolation

Organis Ü-Gruppen neu!

Programmier-Ü Mittwoch

diese Woche Installation Python 0. Mittel  
Zettel immer Do. (16)

①

Sei  $\{ \Phi(x, a_0, a_1, \dots, a_n) \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

eine Familie von Funktionen mit  $x \in \mathbb{R}$ ,  
parametrisiert durch  $a_0, \dots, a_n$ .

Ziel: zu Wertepaaren  $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2$

$k = 0, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_k$  für  $i \neq k$

suchen wir Parameter  $a_0, \dots, a_n$ ,

so dass

$$\Phi(x_k, a_0, \dots, a_n) = f_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Falls  $\Phi$  linear von  $a_i$  abhängt, nennen  
wir dies ein

lineares Interpolationsproblem

$(x_k, f_k)$  sind z.B. Messwerte oder

$f_k = f(x_k)$ ,  $f \in C^0$ ,  $x_0, \dots, x_n$  diskrete  
Stützstellen



## Beispiele:

(2)

Wir betrachten Vektorraum  $V \subset C^0(\mathbb{R})$   
 $\dim(V) = n+1$ ,  $f_0, \dots, f_n$  Basis von  $V$

$$\Phi(x, a_0, \dots, a_n) := \sum_{k=0}^n a_k f_k$$

### a) Polynom-Interpolation:

$$\text{Sei } V = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynome bis Grad } n}}{P_n}, f_k(x) = x^k, \text{ d.h. } \Phi(x, \dots) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Polynome bis Grad  $n$   $\uparrow$  Monombasis

"Finde ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades, so dass  $p(x_k) = f_k$ ."

weitere Beispiele...

### b) Trigonometrische Interpolation

$$\begin{aligned} \Phi(x, a_0, \dots, a_n) &= a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{2ix} + \dots + a_n e^{nix} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (\cos(kx) + i \sin(kx)) \end{aligned}$$

### c) Exponentielle Interpolation

$$\Phi(x, a_0, \dots, a_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x}$$

→ nicht linear

②

d) Rationale Interpolation

$$\tilde{f}(x, a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

e) Hermite-Interpolation (Erweiterung)

 betrachte nicht nur Funktionswerte  $f_k$ ,  
sondern auch Ableitungen  $d_k$ 

 Gegeben  $(x_k, f_k, d_k) \in \mathbb{R}^3, k=0 \dots n$ 

 Finde  $p(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j$ , so dass

$$p(x_k) = f_k, \quad p'(x_k) = d_k \quad \forall k=0 \dots n$$

f) Spline-Interpolation

 Für  $q \in \mathbb{N}$  fest

 Gesucht:  $\tilde{f} \in C^q, \tilde{f}(x_k) = f_k$ 

 und  $\tilde{f}|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathcal{P}_q$  (stückweise  
polynomial)

# 1.1 Polynom-Interpolation

(4)

Gegeben  $(x_k, f_k)$ ,  $k=0, \dots, n$

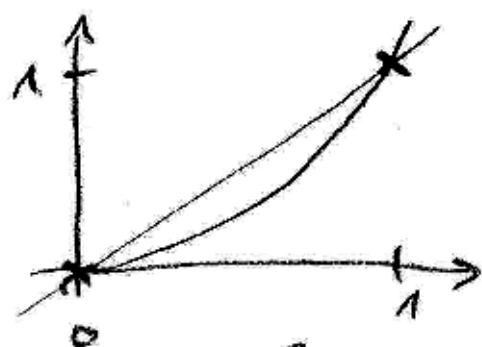
$x_k \neq x_i$  für  $k \neq i$

suchen wir

$p \in \mathcal{P}_N$  mit  $p(x_k) = f_k$ ,  $N$  minimal

Beispiel  $(x_0, f_0) = (0, 0)$

$(x_1, f_1) = (1, 1)$



erfüllt für

$$p(x) = x^N, N \geq 1$$

$\Rightarrow$  Gesuchte Lös  $p(x) = x$

Satz 1.1  $\exists$  genau ein  $p \in \mathcal{P}_n$  mit

$$p(x_i) = f_i \quad (i=0, \dots, n)$$

Beweis Sei  $p_0, \dots, p_n$  Basis von  $\mathbb{P}_n$

(5)

• Interpolation äquiv. zu

Finde  $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , sodass  $Aa = f$

mit  $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $A_{ik} = p_k(x_i)$

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\bullet Aa = f \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{ik} a_k = f_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_k a_k p_k(x_i) = f_i$$

$$\Leftrightarrow p(x_i) = f_i, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x)$$

• Existenz & Eindeutigkeit  $\Leftrightarrow A$  regulär

• Sei  $a$  Lösung von  $\sum_k a_k p_k(x_i) = 0$

$\Rightarrow p(x) \in \mathbb{P}_n$  hat  $(n+1)$  Nullstellen  $x_0, \dots, x_n$

$\Rightarrow p = 0$ , d.h.  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

• D.h. aus  $Aa = 0$  folgt  $a = 0$

$\Rightarrow A$  injektiv  $\Rightarrow A$  regulär

$\Rightarrow$  Interpol. eindeutig lösbar

Bemerkung Satz 1.1 liefert Ansatz für Lösungs-

⑥

Verfahren: Lösen des LGS  $Aa = f$

für konkrete Basis, z.B.  $p_k(x) = x^k$ ,  $p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

"Vandermonde-Matrix"

Aber: schlecht konditioniert,  
dicht besetzt

→ teuer zu invertieren

$p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  heißt "Normalform"

→ Ansatz: wähle andere Darstellung, d.h.  
andere Basis

a) Lagrange Form

Besonders einfach wäre  $A = \mathbb{1}$ , d.h.

$$p_k(x_i) = \delta_{ik}$$

$$\rightarrow \text{Ansatz } p_k(x) = c \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)$$

$i=0$   
 $i \neq k$

0 für  $x = x_i$

→  $\varphi_k = 0 \forall i \neq k$

Normierung, sodass  $p_k(x_k) = 1$



Normierung:  $p_k(x_k) \stackrel{!}{=} 1$

(7)

$$\Rightarrow c = \left[ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i) \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow p_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad \forall k \in [0, \dots, n]$$

Definition 1.2 Lagrange-Polynome

$$l_k^n = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

heißen Lagrange-Polynome,  
 $(l_0^n, \dots, l_n^n)$  bilden eine Basis von  $P_n$ .

Es gilt  $l_i^n(x_j) = \delta_{ij}$ .

$\rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^n f_k l_k^n(x)$  ist das

Interpolationspolynom zu  $(x_0, f_0) \dots (x_n, f_n)$

Bemerkung: Angenehm, da  $p(x_j) = f_j$ , auch  
 beliebt für Theorie, aber: ganz neue Basis, wenn  
 neue Stützstellen hinzukommen!



b) Newton-Form

Ausatz:  $A$  untere  $\Delta$ -Matrix

Definition 1.3 Newton-Polynome

$$N_k^n = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

heißen Newton-Polynome

Es gilt  $p_0 = N_0^n = 1$  (Konstante!)

$$p_1 = N_1^n = (x - x_1)$$

$$p_2 = N_2^n = (x - x_2)(x - x_1)$$

$\vdots$

d.h.  $A$  ist untere  $\Delta$ -Matrix

$$[N_k^n(x_i) = 0 \text{ fur } i < k]$$

Fur Koeff. gilt:

$$a_0 = f_0 (p_0(x_0))^{-1} = f_0$$

$$a_1 = (f_1 - p_0(x_1)a_0) (p_1(x_1))^{-1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = (f_2 - p_0(x_2)a_0 - p_1(x_2)a_1) (p_2(x_2))^{-1}$$

Berechnung über "dividierte Differenzen"

9

Weitere Polynomdarstellungen:

 Def 1.4 Tschelbyschev - Polynome  
(Čebyšev - )

 auf Intervall  $[-1, 1]$  def. wird die T-P

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

oder (T-P 2. Art)

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Normierung  

$$\hat{T}_n(x) = 2^{-n} T_n(x)$$

Benannt nach russischen Mathematiker

Čebyšev 1821 - 1894

- orthogonale Basis
- "optimale" Wahl der Stützstellen

Eigenschaften Tschebyschev-Pol. ①

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

→ Ableitung!  $T'_n(x) = 2^{1-n} T'_n(x)$

Satz 1.5  $x \in [-1, 1]$

Es gilt  $T_n = \cos(n \arccos(x))$  ⊗

Weiter gilt

①  $|T_n(x)| \leq 1$

②  $T_n(\cos(\pi \frac{j}{n})) = (-1)^j \quad (0 \leq j \leq n)$

③  $T_n(\cos(\pi \frac{2j-1}{2n})) = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$

④  $T_n \in P_n(-1, 1)$

⑤  $T'_n \in P_{n-1}$ , höchsthoeh ist  $n$

⑥  $\{T_n\}$  bildet Orthogonalbasis des  $P_n$

Bzgl. des gewichteten  $L^2$ -Skalarprodukts

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Beweis Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) \\ &\quad - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

$$\text{und } \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\ = 2 \cos(n\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$$

Setze  $\theta = \arccos(x)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos((n+1)\arccos(x)) \\ = 2 \boxed{\cos(n\arccos(x))} x - \cos((n-1)\arccos(x))\end{aligned} \stackrel{!}{=} T_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow T_n$  genügt der Rekursionsformel

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x$$

$$\Rightarrow T_n = T_n$$

## Eigenschaften

1-3 folgen aus Definition (\*)

4 folgt aus Rekursionsformel

5, 6 Übungsaufgabe

## 1.2 Funktionsinterpolation durch Polynome ②

Gegeben Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$ ,  $f$  stetig

Gesucht I-P  $p(x) \in \mathbb{P}_n$  zu  $(x_i, f_i(x))$ ,  $i=0, \dots, n$

### Satz 1.6 Fehlerdarstellung

Sei  $f \in C^{n+1}(a, b)$ ,  $p \in \mathbb{P}_n$  I-P,

dann existiert zu jedem  $x \in (a, b)$  ein  $\xi_x \in (a, b)$

$$(*) \text{ mit } f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \underbrace{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}_{=: \omega(x)}$$

Beweis Für  $x = x_i$  erfüllt, da  $f(x_i) = p(x_i)$

$$\text{und } \omega(x_i) = 0$$

Für  $x \neq x_i$ , betr.  $\Phi(t) = f(t) - p(t) - \lambda \omega(t)$

$$\text{mit } \lambda = \frac{f(x) - p(x)}{\omega(x)} \in \mathbb{R}, x \text{ fest}$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = 0 \text{ und } \Phi(x_i) = 0 \Rightarrow n+2 \text{ Nullst.}$$

$\uparrow$   
w hängen,

Rest hebt sich weg

$$\uparrow$$

$$p(x_i) = f(x_i)$$

$$\omega(x_i) = 0$$



$\Rightarrow \Phi'$   $n+1$  Nullst. ④  
 (Satz von Rolle)

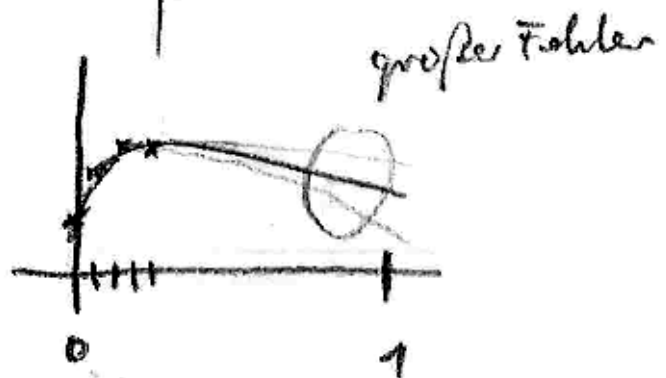
$\Rightarrow \Phi^{(n+1)}$  eine Nullstelle  $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{mit } 0 = \Phi^{(n+1)}(\xi) = \underbrace{f^{(n+1)}(\xi)}_{\text{Abl. von } f} - \underbrace{(n+1)!}_{\omega \text{ ableiten } \downarrow} \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}$$

Umstellen liefert (\*)

Anmerkung Fehler abh. von Stützstellen

Frage: - Wird Fehler kleiner für mehr Stützst.?  
 - Optimale Wahl der Stützstellen?



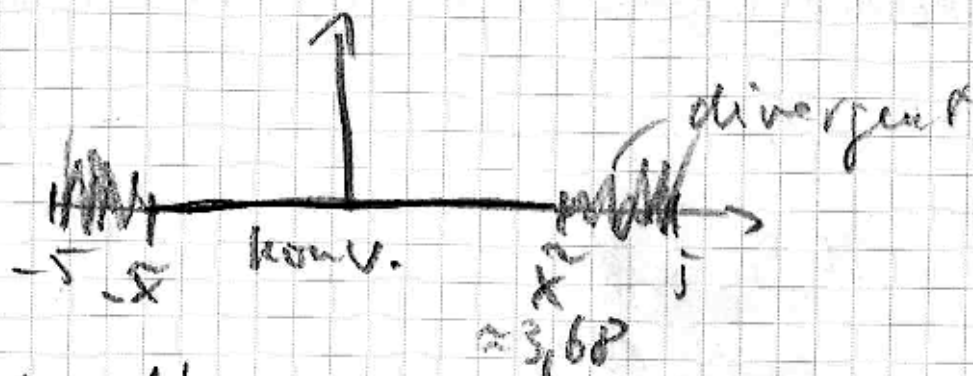


Beispiel 1.7 (Runge) ⑤

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

äquidistante Stützstellen  $x_k^{(n)} = -5 + k \frac{10}{n}$

Betrachte  $n \rightarrow \infty$



(Beweisbar!)

Allgemein • Für jede stetige Funktion  $f$

$\exists$  eine Folge von Stützstellen mit

$P_n \rightarrow f$  gleichmäßig

• Für je Folge von Stützstellen

$\exists$  eine stetige Funktion so dass

$P_n \not\rightarrow f$  gleichmäßig

## Optimale Wahl von Stützstellen auf $[-1, 1]$

Idee: wähle  $x_0, \dots, x_n$ , so dass  $\|w\|_{L^\infty([-1, 1])}$  minimal

Ansatz: a)  $w(x)$  ist normiertes Polynom.  
( $n+1$ )-ten Grades.

b) Stützst. sind Nullst. von  $w$

$\Rightarrow$  Suche norm. Pol. mit min  $L^\infty$  Norm,  
wähle Nullst. als Stützst.

Lemma 1.9 Sei  $p \in P_n([-1, 1])$  normiert,  
dann gilt

$$\|p\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq 2^{1-n} = \|\hat{T}_n\|_\infty$$

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme  $|p(x)| < 2^{1-n} \quad \forall x \in [-1, 1]$

Sei  $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ .

$$\stackrel{1.5(2)}{\Rightarrow} (-1)^j p(x_j) \leq |p(x_j)| < 2^{1-n} = (-1)^j \hat{T}_n(x_j)$$

$$\Rightarrow (-1)^j (\hat{T}_n(x_j) - p(x_j)) > 0$$

$\Rightarrow \hat{T}_n - p$  wechselt ( $n+1$ ) mal Vorz.  $\zeta$   
aber  $(\hat{T}_n - p)$  Pol ( $n-1$ )ten Grades (wegen Normierung)

□

## Korollar 1.10

(7)

Mit Stützstellen  $x_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(n+1)}\right)$   
 $k = 1, \dots, n+1$  (Nullst. von  $T_{n+1}$ )  
 ist  $w = \hat{T}_{n+1}$  und  $\|w\|_\infty = 2^{1-(n+1)}$

## 1.3 Dividierte Differenzen

Gemacht: Effizienter  
 Algorithmus zur  
 Berechnung von  $a_k$

für  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$

Newton Form

$$N_k(x) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j) & \text{sonst} \end{cases}$$

### Def 1.11 Dividierte Differenzen

Seien  $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$  paarweise versch.  
 und  $P_{i_0, \dots, i_k} \in \mathbb{P}_k \mathbb{R}$  zu Daten  $(x_{i_0}, f_{i_0}), \dots, (x_{i_k}, f_{i_k})$   
 $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$  bezeichnet den Höchstkoeff.  
 (d.h. vor  $x^k$ ) in  $P_{i_0, \dots, i_k}$   
 wird als Div. Diff. der  
 Ordnung  $k$  bezeichnet

Erinnerung

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} =: f[x_0, x_1]$$

→ Folien

$$a_2 =: f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Satz 1.12 Es gilt

$$(i) P_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0}) P_{i_1, \dots, i_k} - (x - x_{i_k}) P_{i_0, \dots, i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

(Rekursion)

$$(ii) f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

$$f[x_{i_k}] = f_{i_k}$$

(iii) Die Div Diff sind unabh. von Permutat. der Koeffizienten

Ohne Beweis

Beispiel 1.13

→ Folien



1

Erinnerung: Auswertung Horner-Schema

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$= (((\dots ((a_n x_{n-1} + a_{n-1}) x_{n-2} + a_{n-2}) x_{n-3} \dots))$$

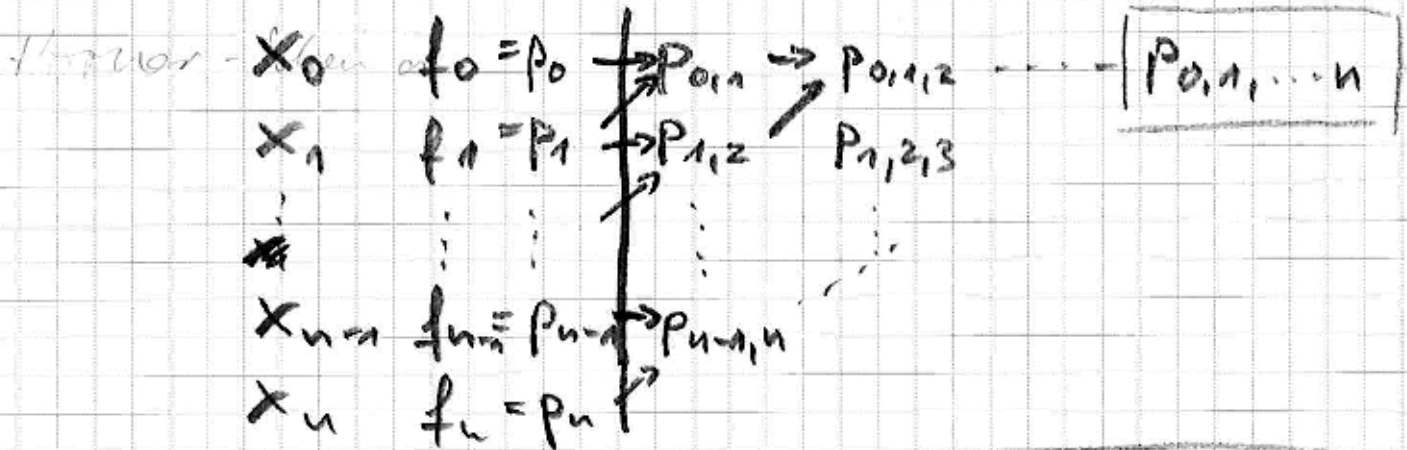
Satz 1.16

Neville Schema

Interpolationspolynom nur auswerten, ohne Koeffizienten zu berechnen?

Ausatz: Rekursionsformel 1.12(i)

Tableau: Gesucht:  $p_{0,1,\dots,n}(x) \in \mathcal{P}_n$



Beispiel 1.17 (siehe Folien)

$x_i$	3	1	5	6
$f_i$	1	-3	2	4

Rekursion:

$$p_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0}) p_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k}) p_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

$$p(x) = ? \text{, d.h. } x=0$$

(2)

3	1	$(0-3)(-3) - (0-1)1 = -5$	$-\frac{29}{8}$	$-\frac{35}{4}$
1	-3	$(0-1)2 - (0-5)(-3) = -\frac{17}{4}$	$-\frac{2}{2}$	
5	2	$5-1 = -8$		
6	4	$\dots$		

## 1.4 Kondition & Stabilität

Def 1.18 normierte Fließkommazahlen

$F(\beta, r, s) \subset \mathbb{R}$  ist die Menge der norm. Fließk.z.  
zur Basis  $\beta \in \mathbb{N}, \beta \geq 2$ .

•  $x \in F$  hat die Form

$$x = m \beta^e$$

mit Mantisse  $m = \pm \sum_{i=1}^r m_i \beta^{-i}, m_i \in \{0, 1, \dots, \beta-1\}$

und Exponent  $e = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j \beta^j, e_j \in \{0, 1, \dots, \beta-1\}$

• Für  $x \neq 0$  gilt  $m_1 \neq 0$  (Normierung)

Beispiel 1.19

$$F(2, 2, 1) \quad x = \pm \left( m_1 \cdot \frac{1}{2} + m_2 \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot 2^{\pm e_0}$$

$$m_i, e_i \in \{0, 1\}$$

$$\text{d.h. } F(2, 2, 1) = \left\{ \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{1}{4}, 0 \right\}$$



Erinnerung Gerundete Rechenoperationen ③

$$x, y \in \mathbb{F} \quad \otimes \in \{+, -, \cdot, /$$

$$x \otimes y = rd(x \otimes y) = (x \otimes y) (1 + \varepsilon)$$

$$\text{Fehler } \varepsilon, |\varepsilon| \leq \text{eps}$$

eps : Maschinengenauigkeit

1.19 Fehlerfortpflanzung:

Wir betrachten  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$y = f(x), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{x} = x + \Delta x \quad \text{gestörte Daten}$$

$$f(x + \Delta x) \rightarrow y + \Delta y = \tilde{y}$$

$|\Delta y|$  : absoluter Fehler

$\left| \frac{\Delta y}{y} \right|$  : relativer Fehler

Annahme  $|\Delta x_j| \ll |x_j|$  (kleiner rel. Fehler)

$f_i = f_i(x_0, \dots, x_m)$  stetig diffbar

nach Taylor:

$$\Delta y_i = f_i(x + \Delta x) - f_i(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \Delta x_j + \mathcal{O}(|\Delta x|^2)$$

Für rel. Fehler: "erste Näherung"

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} \approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{\Delta x_j}{y_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{x_j}{f_i(x)}}_{K_{ij}(x)} \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

Def 1.20  $K_{ij}(x)$  heißen  $K_{ij}(x)$

"(relative) Konditionszahlen" der  
Funkt  $f$  im Punkt  $x$ .

$y = f(x)$  heißt

"~~schlecht~~ schlecht konditioniert", wenn ein  $|K_{ij}| \gg 1$

"gut"  $\longleftrightarrow$  "sonst"

Fehler werden für  $|K_{ij}| < 1$  gedämpft  
 $|K_{ij}| > 1$  verstärkt.

Beispiel Addition

Lemma 1.21 Kondition der Grundoperationen

a)  $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\frac{\Delta y}{y} = 1 \cdot \frac{x_1}{x_1 + x_2} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} + 1 \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad (\text{Auslöschung})$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{1 + \frac{x_2}{x_1}} = K_2$$

Schlecht konditioniert für  $x_1 \approx -x_2$

5

Analog: Subtraktion

Schlecht kond. für  $x_1 \approx x_2$

$$b) y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} = x_2 \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} + x_1 \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow \kappa_{1,2} = 1$$

Mult. (& Div.) ist gut kond.

### Def 1.22 Stabilität

Bei der Auswertung eines Alg. auf dem Computer treten Fehler auf, welche sich akkumulieren. Ein Alg heißt stabil, falls die akkumulierten Fehler, durch die Kondition bedingte Problemfehler nicht übersteigen.

(Fehler durch falsches  $f$  gegenüber Fehlerverstärkung)

### Beispiel 1.23 Polynomauswertung

$$p(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = x(a_1 + a_2 x)$$

Alg i)  $u = x \odot x, v = a_2 \odot u, w = a_1 \odot x, \tilde{y} = v \oplus w$

Alg ii)  $u = a_2 \odot x, v = a_1 \oplus u, \tilde{y} = x \odot v$

• (ii) span 1 arith. Operation

(6)

• Rundungsfehler:

$$i) u = x^2 (1 + \varepsilon_1)$$

$$v = a_2 x^2 (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) = a_2 u (1 + \varepsilon_2)$$

$$w = a_1 x (1 + \varepsilon_3)$$

$$\tilde{y} = [a_2 x^2 (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) + a_1 x (1 + \varepsilon_3)] (1 + \varepsilon_4)$$

$$= \underline{a_2 x^2 + a_1 x} + \underline{(a_2 x^2 + a_1 x)} \varepsilon_4 + a_2 x^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_1 x \varepsilon_3 + O(\text{eps}^2)$$

$$= y + y \varepsilon_4 + a_2 x^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_1 x \varepsilon_3 + O(\text{eps}^2)$$

$\Rightarrow$  1. Ordn. rel Fehler

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \varepsilon_4 + \frac{a_1 x \varepsilon_3 + a_2 x^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{a_1 x + a_2 x^2}$$

$$= \varepsilon_4 + \varepsilon_3 + \frac{x}{a_1/a_2 + x} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

$$ii) u = a_2 x (1 + \varepsilon_1), \quad v = [a_1 + a_2 x (1 + \varepsilon_1)] (1 + \varepsilon_2)$$

$$\tilde{y} = x [\dots] (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_3)$$

$$= y + a_1 x (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + a_2 x^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + O(\text{eps}^2)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \frac{x}{a_1/a_2 + x} \varepsilon_1$$

Für  $x \approx -\frac{a_1}{a_2}$  (Nullst.) ist (ii) (etwas) stabiler

⇒ Horner-Schema (Monom-Koeffizienten!) ⑦

~~Pol~~  $p = a_n$

For  $k = n-1, \dots, 0$

$$p = a_k + p x$$

😊 Jetzt wissen wir warum wir das Horner-Schema nehmen sollten!

### 1.5 Hermite Interpolation

Gegeben: Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$ ,  
max Grad  $m_i$  an  $x_i$  und

Werte  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $j \in [0, m_i)$ , an  $x_i$ .

Gesucht: Polynom  $p \in \mathcal{P}_n$  mit

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij} \quad \forall i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, m_i - 1$$

und

$$n+1 = \sum_{i=0}^m m_i$$

Satz 1.24  $\exists$  genau ein  $p \in \mathcal{P}_n$ , welche die

Bed. der Hermite-Interpol. erfüllt

Beweis: analog zu Satz 1.1 □



Analog zu 1.6:

(P)

Satz 1.25 (Fehlerdarstellung der Hermite-Interpol.)

Sei  $f \in C^{n+1}(a,b)$ ,  $P \in \mathcal{P}_n$  das Hermite-IP

zu  $n$  Datenpaaren

$$(x_0, f(x_0)), \dots, (x_0, f^{(m_0-1)}(x_0))$$

$$\vdots$$

$$(x_m, f(x_m)), \dots, (x_m, f^{(m_m-1)}(x_m))$$

dann existiert zu jedem  $x \in [a,b]$  ein  $\xi \in [a,b]$

mit 
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{m_k}$$

Beweis: analog zu 1.6 □

↓ Beispiel 1.26 Konstruktion ähnlich Div-Diff (A)

Gesucht  $P \in \mathcal{P}_2$  mit  $P(x_0) = C_{00}$   
 $P'(x_0) = C_{01}$   
 $P(x_1) = C_{10}$

Tableau:

$x_i$	$f_i$	
$x_0$	$C_{00}$	$f[x_0, x_0]$ $f[x_0, x_0, x_1]$
$x_0$	$C_{00}$	$f[x_0, x_1]$
$x_1$	$C_{10}$	

Problem!

Analog zu 1.6:

(P)

Satz 1.25 (Fehlerdarstellung der Hermite-Interpol.)

Sei  $f \in C^{n+1}(a, b)$ ,  $P \in \mathcal{P}_n$  das Hermite-IP

zu  $n$  Datenpaaren

$$(x_0, f(x_0)), \dots, (x_0, f^{(m_0-1)}(x_0))$$

$$\vdots$$

$$(x_m, f(x_m)), \dots, (x_m, f^{(m_m-1)}(x_m))$$

dann existiert zu jedem  $x \in [a, b]$  ein  $\xi \in [a, b]$

mit 
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{m_k}$$

Beweis: analog zu 1.6 □

↓ Beispiel 1.26 Konstruktion ähnlich Div-Diff (A)

Gesucht  $P \in \mathcal{P}_2$  mit  $P(x_0) = C_{00}$   
 $P'(x_0) = C_{01}$   
 $P(x_1) = C_{10}$

Tableau:

$x_i$	$f_i$	
$x_0$	$C_{00}$	$f[x_0, x_0]$ $f[x_0, x_0, x_1]$
$x_0$	$C_{00}$	$f[x_0, x_1]$
$x_1$	$C_{10}$	

Problem!

Nach Satz 1.16 gilt

(2)

$$\lim_{t \rightarrow x_i} f[x_i, t] = f'(x_i) \quad (\text{ähnlich für höhere Abl.})$$

d.h. wir ersetzen  $f[x_0, x_0] = f'(x_0) = C_{01}$

$$\begin{array}{ccc|c} x_0 & C_{00} & C_{01} & \rightarrow \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} \\ x_0 & C_{00} & \rightarrow \frac{C_{10} - C_{00}}{x_1 - x_0} & \nearrow \\ x_1 & C_{10} & & \end{array}$$

und erhalten die Darstellung in Newton-Form

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2$$

Satz 1.27 In Newton-Form löst sich das H-I-P

Schreiben als

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f[z_0, \dots, z_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - z_j)$$

mit  $z_0 = \dots = z_{m_0-1} = x_0$

$z_{m_0} = \dots = z_{m_0+m_1-1} = x_1$

etc.

Sei  $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$  und o.B.d.A.  $z_{i_0} \leq z_{i_1} \leq \dots \leq z_{i_k}$

so gilt

$$f[z_{i_0}, \dots, z_{i_k}] = \begin{cases} \frac{f[z_{i_1}, \dots, z_{i_k}] - f[z_{i_0}, \dots, z_{i_{k-1}}]}{z_{i_k} - z_{i_0}} & : z_{i_k} \neq z_{i_0} \\ \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_{i_0}) & : z_{i_k} = z_{i_0} \end{cases}$$

Bemerkung 1.2 P

- i) Bei H-I-P werden die Werte vorgeschrieben, die nicht durch Rekursion gegeben sind
- ii) I-P, bei denen nicht für alle  $j = 0, \dots, m_j - 1$  die Werte  $p^{(j)}(x_i)$  vorgeschrieben sind, sind schwerer zu lösen.  
(evntl. Übung)

1.6 Richardson Extrapolation

(engl. Math. 1881 - 1953)

Problem: Fkt nicht überall explizit auswertbar

Gegeben: Fkt  $a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Gesucht:  $a(0) = \lim_{h \downarrow 0} a(h)$

Idee: Wähle  $h_0, \dots, h_n$ , setze  $a_k = a(h_k)$ ,  
bestimme I-P zu  $(h_0, a_0), \dots, (h_n, a_n)$ ,  
approximiere  $a(0) \approx p(0)$

### Beispiel 1.29

④

i) Berechnung von  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}}_{=: a(h)}$

Wähle  $h_k = 2^{-k}$

$h_0 = 1 \rightarrow a_0 = 2$

$h_1 = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 9/4$

$h_2 = \frac{1}{4} \rightarrow a_2 = \frac{625}{256}$

liefert  $p(0) \approx 2,67708$  ( $e \approx 2,71828...$ )

### ii) Differenzial-Quotient

$f \in C^1$ , numerische Berechnung von  $f'$

$$a(h) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

Taylorreihe:  $f(h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) h^i$

$f(-h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) (-h)^i$

$\Rightarrow a(h) = a(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i} h^{2i}$ ,  $a(0) = f'(0)$

(gerade Fkt, nur  $h^{2i}$  Terme)



$$f(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow a(h) = \frac{\sin(h) - \sin(h)}{2h} = \frac{\sin(h)}{h}$$

Gesucht  $p(h) = q(h^2)$ ,  $q \in \mathcal{P}_n$

$$h_0 = \frac{1}{8} \quad a_0 = 0,9973$$

$$h_1 = \frac{1}{16} \quad a_1 = 0,99934$$

$$h_2 = \frac{1}{32} \quad a_2 = 0,99993$$

$$\Rightarrow p(0) = q(0) = 0,999999926$$

### Satz 1.30 Extrapolationsfehler

Für  $a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gelte die asymptotische Entwicklung

$$a(h) = a(0) + \sum_{j=1}^n \alpha_j h^{q_j} + a_{n+1}(h) h^{q(n+1)}$$

mit  $q > 0$ , Koeff.  $\alpha_j$  und  $a_{n+1}(h) = \alpha_{n+1} + o(1)$

für  $h \rightarrow 0$ .

Sei  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallende Folge mit

$$0 < \frac{h_{k+1}}{h_k} \leq \rho < 1, \quad 0 < h_k. \quad (*)$$

Für I-P  $P_n^{(k)} \in \mathcal{P}_n$  zu Daten  $(h_k^q, a(h_k)) \dots (h_{k+n}^q, a(h_{k+n}))$   
(in  $h^q$ )

gilt

$$|a(0) - P_n^{(k)}(0)| = O\left(h_k^{q(n+1)}\right) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Beweis: Wir setzen  $z = h^q$ ,  $z_k = h_k^q$  ⑥

I-P zu Daten  $(z_{k+i}, a(z_{k+i}))$ ,  $i=0, \dots, n$   
in Lagrange-Darst.

$$p_n(z) = \sum_{i=0}^n a(z_{k+i}) L_{k,i}^n(z)$$

$$\text{mit } L_{k,i}^n(z) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n \frac{z - z_{k+l}}{z_{k+i} - z_{k+l}}$$

Betrachten Fehlerdarst. (Satz 1.6) mit  
 $f(z) = z^r$ ,  $r=0, \dots, n+1$  (Monombasis)

$$\text{und I-P } q_n^{(k)}(z) = f(z_{k+i}) L_{k,i}^n(z)$$

$$\text{bzw. } q_n^{(k)}(0) = z_{k+i}^r L_{k,i}^n(z)$$

$$\Rightarrow f(0) - q_n^{(k)}(0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_0) \prod_{i=0}^n (0 - z_{k+i})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n z_{k+i}^r L_{k,i}^n(0) = f(0) - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_0) (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^n z_{k+i}$$

$$= \begin{cases} 1 & : r=0 \\ 0 & : r=1, \dots, n \\ (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^n z_{k+i} & : r=n+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_n^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^n \left( a(0) + \sum_{j=1}^n \alpha_j z_{k+i}^j + \alpha_{n+1} z_{k+i}^{n+1} + o(1) z_{k+i}^{n+1} \right) L_{k,i}^n(0) \quad (7)$$

$$= a(0) \sum_{i=0}^n L_{k,i}^n(0) + \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \sum_{i=0}^n z_{k+i}^j L_{k,i}^n(0) + o(1) \sum_{i=0}^n z_{k+i}^{n+1} L_{k,i}^n(0)$$

$$= a(0) + \alpha_{n+1} (-1)^n \prod_{i=0}^n z_{k+i} + \sum_{i=0}^n o(1) z_{k+i}^{n+1} L_{k,i}^n(0)$$

$$\Rightarrow \left| \alpha_{n+1} (-1)^n \prod_{i=0}^n z_{k+i} \right| \leq \left| \alpha_{n+1} \prod_{i=0}^n z_k \right| = |\alpha_{n+1}| z_k^{n+1}$$

$$= |\alpha_{n+1}| h_k^{q(n+1)} = O(h_k^{q(n+1)})$$

Weiter gilt

$$\left| L_{k,i}^n(0) \right| = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n \left| \frac{z_{k+l}}{z_{k+l} - 1} \right| \leq C(S, n, q) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=0}^n o(1) L_{k,i}^n(0) z_{k+i}^{n+1} \right| \leq C o(1) z_k^{n+1} = O(h_k^{q(n+1)})$$

$$\Rightarrow \left| p_n^{(k)} - a(0) \right| = O(h_k^{q(n+1)})$$

□

Algorithmus: Berechnung mittels Neville-Schema 9

$$P_n^{(k)}(z) = P_{n-1}^{(k+1)}(z) + \frac{P_{n-1}^{(k+1)}(z_k) - P_{n-1}^{(k)}(z_k)}{z_k - z_{k+n}}$$

(umgestellt)

mit  $P_n^{(k)}(z) = P_{k, k+1, \dots, k+n}(z)$

Wähle  $a_{k,n} := P_n^{(k+n)}(z)$

→ Rekursion

$$a_{k,n} = a_{k,n-1} + \frac{a_{k,n-1} - a_{k-1,n-1}}{\left(\frac{z_{k-n}}{z_k}\right)^q - 1}$$

Tabellen

$h_0$	$a_{0,0}$				
$h_1$	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$			
	$\vdots$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$h_k$	$a_{k,0}$	$a_{k,1}$	$a_{k,2}$	$\dots$	$a_{k,k}$
	$\vdots$				

Beispiel Fortsetzung 1.29 (i)

$h_0 = 1$       $a_{0,0} = 2$

$h_1 = \frac{1}{2}$       $a_{1,0} = \frac{9}{4}$

$h_2 = \frac{1}{4}$       $a_{2,0} = \frac{625}{256}$

$\frac{5}{2}$

$\frac{337}{128}$

$\frac{257}{96} \approx 2,67708$

NR:  $a_{1,1} = \frac{9}{4} + \frac{\frac{9}{4} - 2}{2 - 1} = \frac{13}{4}$



## 1.7 Trigonometrische Interpolation ①

Gegeben: Stützstellen, Werte  $(x_k, y_k)$ ,  $k=0, \dots, n$ ,  $x_k \in [0, \omega)$

Gesucht: periodische Fkt  $t_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Periode  $\Omega$ ;

$$t_n(x + \Omega) = t_n(x) \quad \text{und} \quad t_n(x_k) = y_k$$

ObdA sei  $\Omega = 2\pi$

Ansatz: Fourier-Analyse  $\rightarrow$  Trigonom. Fkt

Suche Koeff  $(a_k, b_k)$  mit

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (\text{TIP})$$

$$+ \Theta \frac{1}{2} a_{m+1} \cos((m+1)x)$$

mit

$$m = \begin{cases} m/2 & : \text{ungerade} \\ (n-1)/2 & : \text{n unger.} \end{cases} \quad \Theta = \begin{cases} 0 & : \text{ungerade} \\ 1 & : \text{n unger.} \end{cases}$$

d.h.:  $1, \cos(x), \cos(2x), \dots$   
 $\sin(x), \sin(2x), \dots$

Einfacher Ansatz  $\rightarrow$  umformulieren via

Euler'scher Formel  $e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$

Def 139 Trigonometr. Polyn. von Grad  $n$

$$T_n := \left\{ t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid t^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikz} \right\}$$

Ziel: Konstruktion der Interpolation

1.30 hat Form wie Normalform mit

•  $w := e^{i\theta}$ ,  $t^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k w_k^k$

Weitere Annahmen & Notationen:

• äquidistant Stützstellen  $x_k = \frac{2\pi}{n+1} = \frac{2\pi}{N}$ ,  $k=0 \dots n$ ,  $N=n+1$

•  $\hat{w} := e^{i \frac{2\pi}{N}} \in \mathbb{C}$ ,  $w_k = w(x_k) = e^{i k \frac{2\pi}{N}} = \hat{w}^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Lemma 1.31 (ein paar wichtige Eigenschaften)

i)  $(w^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  bilden Orthonormalsystem

d.h.  $\langle w^k, w^l \rangle = \delta_{kl}$

mit  $\langle a, b \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \bar{b} dx$

ii)  $w_k^{n+1} = 1$ , d.h.  $w_0 \dots w_n$  sind die  $N=n+1$  Einheitswurzeln und  $w_0 \dots w_n$  paarw. versch.

iii)  $w_k^l = w_l^k$ ,  $w_{n+1-k}^l = w_{-k}^l$ ,  $w_k^{-l} = \overline{w_k^l}$

iv)  $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n w_j^{k-l} = \delta_{kl}$ ,  $0 \leq k, l < n$

v) Für festes  $j \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n \sin(jx_k) = 0, \quad \sum_{k=0}^n \cos(jx_k) = \begin{cases} n+1 & : (n+1) \mid j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 1.32 Trigonon-Interpolation (in  $\mathbb{C}$ )

(3)

Zu den  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{C}$   $\exists$  genau ein  $t_n^* \in T_n$   
mit  $t_n^*(x_k) = y_k$  für  $k=0, \dots, n$

Mit ~~den~~ Koeff  $c_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j \omega_k^{-j}$

Beweis Satz 1.1  $\rightarrow \exists$  genau ein  $p \in P_n$ ,  $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$   
(auch in  $\mathbb{C}$  Beweisbaum)

mit  $c_k \in \mathbb{C}$  und  $p(\omega_k) = y_k$

I-Pza  $(\omega_0, y_0), \dots, (\omega_n, y_n) \rightarrow$  "Interpolation am Kreis"

$$t_n^*(x_k) = \sum_{l=0}^n c_l \omega_k^l = p(\omega_k) = y_k$$

Expl. Dars. folgt mit 1.31

$$\sum_{j=0}^n y_j \omega_k^{-j} = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{l=0}^n c_l \omega_j^l \right) \omega_k^{-j} = \sum_{l=0}^n c_l \underbrace{\sum_{j=0}^n \omega_j^{l-j}}_{= (n+1) \delta_{lk}}$$

$$= (n+1) c_k$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j \omega_k^{-j}$$

□

# Alternative Sicht:

(9)

Interpolation (nach 1.1)

→ Vandermonde matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & & & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^n \end{pmatrix}$$

a) alternativer Beweis: Regularität von A

b) Darstellung folgt aus

$$A \bar{A} = \frac{1}{n+1} \mathbb{1}$$

d.h. A unitär bis auf Konstante

→ unversch. Skalierung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} A\right) \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) A$$

"energieerhaltend"  
aber "teurer"

analog: Satz 1.33 T-I in  $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}, m = \begin{cases} n/2 & : n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & : n \text{ ungerade} \end{cases}, \Theta = \begin{cases} 0 & : n \text{ ger.} \\ 1 & : n \text{ unger.} \end{cases}$$

Zu  $y_0 \dots y_n \in \mathbb{R}$   $\exists$  genau eine Fkt  $t_n(x)$  (TIP)

mit  $t_n(x_k) = y_k, k=0, \dots, n$  und  $\forall$  eff

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j \cos(j x_k)$$

$$b_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j \sin(j x_k)$$

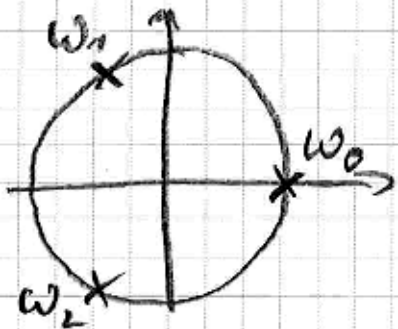
Achtung! Im Allg.  $t_n(x) \neq t_n^*(x)$

⑤

obwohl  $t_n(x_k) = t^*(x_k)$  und auch

$$t_n(x) \neq \operatorname{Re}(t_n^*(x))$$

Beispiel 1.34  $n=2$   $x_0=0, x_1=\frac{2}{3}\pi, x_2=\frac{4}{3}\pi$



$$2x_1 = x_2, \quad x_2 = x_1 + 2\pi$$

$$\Rightarrow \cos(x_1) = \cos(x_2) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x_1) = -\sin(x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

damit:  $c_0 = \frac{1}{3}(y_0 + y_1 + y_2)$

$$c_1 = \frac{1}{3}(y_0 + y_1 e^{-i\frac{2}{3}\pi} + y_2 e^{-i\frac{4}{3}\pi})$$

$$= \frac{1}{3}y_0 - \frac{1}{6}(y_1 + y_2) + i\frac{\sqrt{3}}{3}(y_1 - y_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{3}(y_0 + y_1 e^{-i\frac{4}{3}\pi} + y_2 e^{-i\frac{2}{3}\pi}) = e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{1}{3}y_0 - \frac{1}{6}(y_1 + y_2) + i\frac{\sqrt{3}}{3}(y_2 - y_1)$$

im Reellen:  $m=1, \theta=0$

$$a_0 = \frac{2}{3}(y_0 + y_1 + y_2)$$

$$a_n = \frac{2}{3}(y_0 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2)$$

$$b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(y_1 - y_2)$$

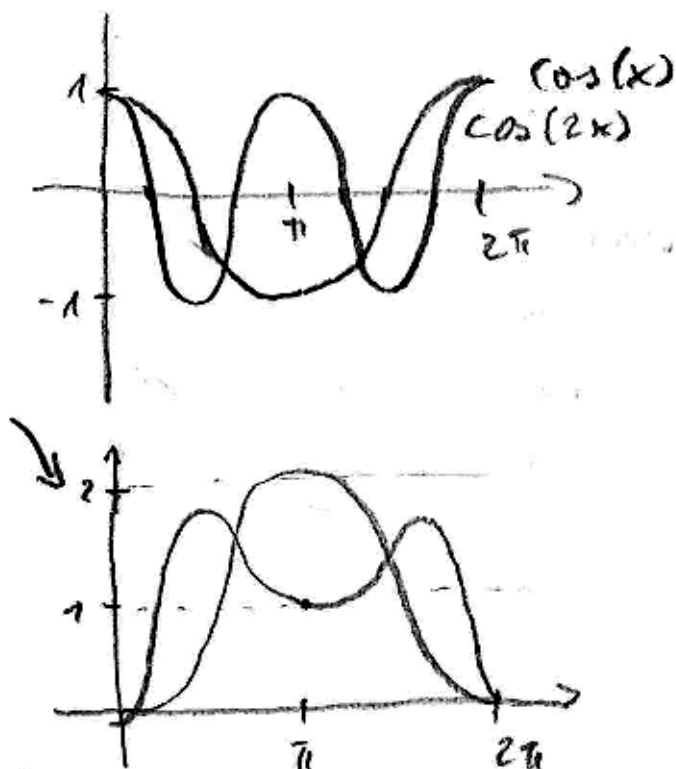


Für  $y_0 = 0, y_1 = y_2 = \frac{3}{2}$  ergibt sich

(6)

$$t_2(x) = 1 - \cos(x)$$

$$\operatorname{Re}(t_2^*)(x) = 1 - \frac{1}{2}(\cos(x) + \cos(2x))$$



Lemma 1.35

Rechenaufwand der DFT (diskrete  
Fourier-Transformations).

DFT als Matrix-Vektor-Produkt implementierbar,  
der Aufwand ist dann  $O(n^2)$

Beobachtung: viele Symmetrien

→ immer wieder gleiche Terme

→ Einsparpotential

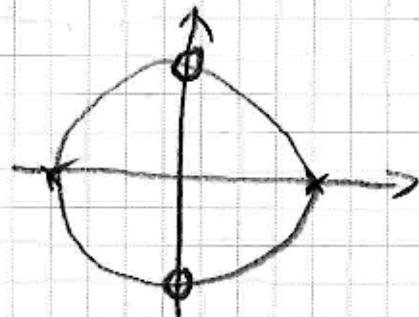
# 1.7.1 Die schnelle Fourier-Transform (FFT) (7)

Ziel: Schnelle Berechnung von  $c_0 \dots c_n$   
 (a<sub>k</sub>, b<sub>k</sub> später ableiten...)

Annahme:  $n = 2^Q - 1$ , d.h.  $N = 2^Q$  Daten

Beispiel i)  $n = 1$

$$\rightarrow \hat{\omega} = -1$$



$$c_0 = y_0 + y_1$$

$$c_1 = y_0 - y_1 \quad \hat{\omega}$$

ii)  $n = 3$

$$\rightarrow \hat{\omega} = -i$$

$$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

$$c_1 = y_0 + (-i)y_1 + (-1)y_2 + (i)y_3$$

$$c_2 = y_0 + (-1)y_1 + y_2 + (-1)y_3$$

$$c_3 = y_0 + iy_1 + (-1)y_2 + (-i)y_3$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} c_0 = \boxed{y_0 + y_2} + \boxed{y_1 + y_3} \\ c_1 = \boxed{y_0 - y_2} + (-i) \boxed{y_1 - y_3} \\ c_2 = \boxed{y_0 + y_2} - \boxed{y_1 + y_3} \\ c_3 = \boxed{y_0 - y_2} - (-i) \boxed{y_1 - y_3} \end{array} \quad \hat{\omega}$$

→ Um sortieren ermöglicht Einsparung

→ Idee: rekursiv blocken → Anforderung  $N=2^Q$   
geht zurück auf Cooley & Tukey 1965

Konstruktion:  $n=2^Q-1$

$$m = \frac{n-1}{2}$$

$l \in \{0, \dots, n\}$  fest

$$C_l = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j w_j^{-l} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^m y_{2j} w_{2j}^{-l} + y_{2j+1} w_{2j+1}^{-l}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{j=0}^m y_{2j} w_{2j}^{-l} \right] + \hat{w}^{-l} \left[ \sum_{j=0}^m y_{2j+1} w_{2j}^{-l} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^m y_{2j} w_{2j}^{-l} + \hat{w}^{-l} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^m y_{2j+1} w_{2j}^{-l} \right]$$

Sei  $l_1 := l \text{ mod } (m+1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$  so dass

$$l = \lambda(m+1) + l_1, \text{ dann gilt}$$

$$l = \frac{1}{2} \lambda (n+1) + l_1 \text{ und}$$

$$w_{2j}^{-l} = e^{-il_1 2j \frac{2\pi}{n+1}} = e^{-i\lambda j 2\pi - il_1 2j \frac{2\pi}{n+1}}$$

$$= \underbrace{e^{-i\lambda j 2\pi}}_{=1} w_{2j}^{-l_1} = w_{2j}^{-l_1}$$

$$\Rightarrow \text{Darst. } C_l = \frac{1}{2} \left( C_{l_1}^{\text{even}} + \hat{w}^{-l} C_{l_1}^{\text{odd}} \right)$$

9

mit

$$C_{e_1}^{\text{even}} = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m y_{2j} w_{2j}^{-l_1}$$

$$C_{e_1}^{\text{odd}} = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \underbrace{y_{2j+1}}_{\text{odd}} w_{2j}^{-l_1}$$

den Koeff der F-T zu

$$(x_0, y_0), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \text{und} \quad (x_1, y_1), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

Erklärung  $\rightarrow$  Folien

①

Algorithmus 1.36 FFT (rekursiv)

FFT( $N, y$ ):

if ( $N == 1$ ):

return  $y$

else:

$c_{\text{even}} = \text{FFT}(\frac{N}{2}, [y_0, y_2, \dots, y_{N-2}])$

$c_{\text{odd}} = \text{FFT}(\frac{N}{2}, [y_1, y_3, \dots, y_{N-1}])$

for  $k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$ :

$c[k] = \frac{1}{2}(c_{\text{even}}[k] + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} c_{\text{odd}}[k])$

$c[k + \frac{N}{2}] = \frac{1}{2}(c_{\text{even}}[k] - e^{-\frac{2\pi i k}{N}} c_{\text{odd}}[k])$

return  $c$

Lemma 1.37

Die FFT hat einen Rechenaufwand von

$O(n \log n)$

Algorithmus 1.37 FFT (iterativ)

$\rightarrow$  Folien



# 1.8 Splines-Interpolation ②

Erinnerung: Runge  $\rightarrow$  Oszillationen für großes  $n$

Besonders, wenn Stützstellen fix

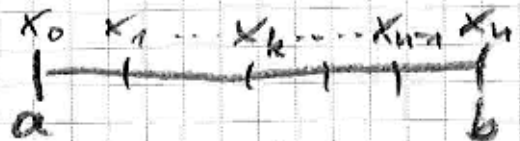
Idee: stückweise polynomiale Funkt

$$p|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_r \quad r \ll n$$

mit  $p(x_i) = y_i \rightarrow$  mindestens  $p \in C^0$   
 i.d.  $p \notin C^\infty$   
 sondern  $p \in C^q$

$\rightarrow$  Wahl von  $(r, q)$ ?

Notation: Intervall  $I = [a, b]$



Zerlegung  $\Delta = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$

Schrittweite  $h_i = x_i - x_{i-1}$

$h := \max h_i$

## Definition 1.38

Für  $r, q \in \mathbb{N}$  ist der Raum der Splines gegeben durch

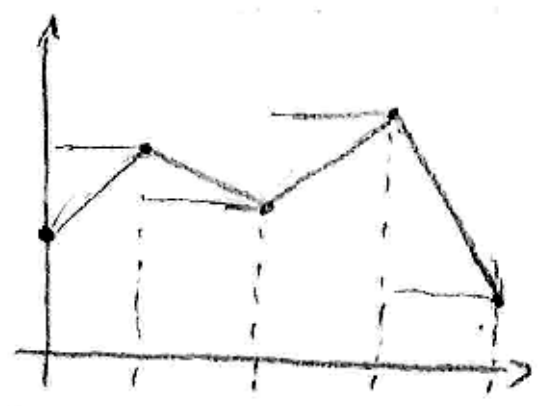
$$\mathcal{S}_{\Delta}^{r, q} := \left\{ p \in C^q(I) \mid p|_{I_i} =: p_i \in \mathbb{P}_r \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

# Beispiele 1.39

$r=0$  stückw. konstant

$$p_{\Delta}(x) = y_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i)$$

→ nicht stetig!



$r=1$   $p_i \in P_1, p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$

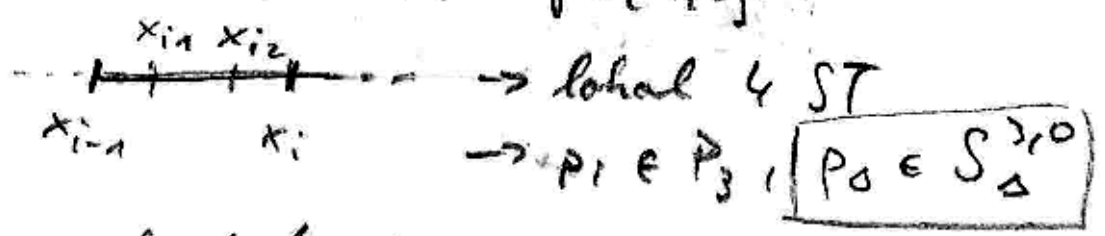
$$p_i(x_i) = y_i$$

→ "Polyganzug",  $p_{\Delta} \in S_{\Delta}^{1,0}$

$r=3$  "kubische Splines"

Daten  $y_k = f(x_k), f \in C^4(I)$

i) Werte  $x_{ij} \in I_i$  mit  $j \in \{1, 2\}$



noch 1.6 gibt

$$|f(x) - p_{\Delta}(x)| \leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{1}{4!} h^4$$

ii) Hermite-IP, d.h. Daten

$$(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i-1}, f'(x_{i-1})), (x_i, y_i), (x_i, f'(x_i))$$

→  $p_i \in P_3, p_{\Delta} \in S_{\Delta}^{3,1}$

und (ebenfalls)

$$|f(x) - p_{\Delta}(x)| \leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{1}{4!} h^4$$

iii) Existiert ein  $p_\Delta \in S_a^{3|2}$ ?

(4)

Überlegung:  $n$  Intervalle, je 2 I-P Bed.  
+  $(n-1) \cdot q$  Stetigkeitsbed.

$\rightarrow 2n + q(n-1)$  Bed.

$\bullet n$  Intervalle, je  $r+1$  Freiheitsgrade

$\rightarrow n(r+1)$  Fg.

Falls  $q \geq r$  folgt

$$\begin{aligned} 2n + q(n-1) &\geq 2n + r(n-1) \\ &= n(r+1) + \underbrace{n-r}_{>0} \\ &> n(r+1) \end{aligned}$$

$\rightarrow$  überbestimmt.

$$\begin{aligned} \frac{q = r-1}{2n + q(n-1)} &\text{ (eigentliche Spline-IP)} \\ &= n(q+2) - q = n(r+1) - q \end{aligned}$$

$\rightarrow q = r-1$  zusätzliche Bed. notwendig!

# 1.8.1 Kubische Splines

(5)

Gesucht  $p_\Delta \in S_\Delta^{3,2}$  auf  $I = [a, b]$ , Daten  $y_i$

mit  $p_\Delta(x_i) = y_i, i \in \{0, \dots, n\}$

und einer zus. Bedingung, z.B.

a)  $p_\Delta''(a) = M_a$  "Momente"  $M_a, M_b \in \mathbb{R}$   
 $p_\Delta''(b) = M_b$

Fall  $M_a = M_b = 0 \rightarrow$  natürl. kub. Splines

b)  $p_\Delta'(a) = g_a$   $g_a, g_b \in \mathbb{R}$   
 $p_\Delta'(b) = g_b$

c)  $p_\Delta'(a) = g$   $p_\Delta''(a) = M$

$\rightarrow$  Spezialfall  $p_\Delta$  periodisch, fortsetzbar

d) not-a-knot Bed.

$$p_\Delta|_{I_1 \cup I_2} \in \mathcal{P}_3 \text{ und } p_\Delta|_{I_{n-1} \cup I_n} \in \mathcal{P}_3$$

$$\rightarrow p_\Delta'''(x) = f'''(x) \text{ für } x = x_0, x = x_{n-1}$$

## Satz 1.40 (Fall (c))

Gegeben Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und Werte

$y_0, \dots, y_n, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(r-1)}$ , existiert ein

eindeutiger Spline  $p_\Delta \in S_\Delta^{r, r-1}$  vom Grad  $r$

mit  $p_\Delta(x_i) = y_i$

$$p_\Delta^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)}$$

6

Beweis Per Def ist  $p_i \in \mathcal{P}_r$

Induktion  $p_{i-1} \rightarrow p_i$

$p_0$ : Gesucht  $p_0 \in \mathcal{P}_r$  mit  $p_0(x_0) = y_0, p_0(x_1) = y_1$   
 $p_0^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)}, j = 0, \dots, r-1$

$\Rightarrow \exists$  eine eindeutig Lös. dieser

Hermite-Interpolation

$p_0$ : Gesucht  $p_0 \in \mathcal{P}_r$  mit  $p_i(x_i) = y_i, p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$   
 $p_i^{(j)}(x_i) = p_{i-1}^{(j)}(x_i)$

$\Rightarrow$  wieder Hermite-IP

□

Anmerkung: Ähnliche Konstruktion auch für andere Ansätze

Anmerkung: Der Name Spline kommt aus dem Englischen & bezeichnet einen dünnen, biegsamen Stab.





$f \in C^2(I)$ , Energie  $\sim$  Krümmung  $\kappa^2(x)$  zum Quad.

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

Annahme  $f'$  klein  $\rightarrow \kappa(x) \approx |f''(x)|$

$\rightarrow$  Minimieren der Biegeenergie  $\int_I f''(x)^2 dx$

Satz 1.41 Für den interpolierenden, natürlichen, kub. Spline  $P_s$  gilt

$$\int_I P_s''(x)^2 dx \leq \int_I f''(x)^2 dx$$

$\forall f \in C^2(I)$  mit  $f(x_i) = y_i, i = 0 \dots n$ .

Beweis: Wir def.  $N := \{w \in C^2(I) \mid w(x_i) = 0, i = 0 \dots n, w'(x_0) = w'(x_n)\}$

zulässige Störungen.

Wir können  $f$  schreiben als

$$f = P_s + w, w \in N$$

$$\int_I f''^2 dx = \int_I P_s''^2 dx + 2 \int_I P_s'' w'' dx + \int_I w''^2 dx \geq \int_I P_s''^2 dx$$

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{i=0}^n \int_{I_i} P_s'' w'' dx = \sum_i \left\{ \underbrace{[P_s'' w']_{x_{i-1}}^{x_i}}_{(*)=0} - \underbrace{[P_s''' w]_{x_{i-1}}^{x_i}}_{=0} + \int_{I_i} P_s^{(4)}(x) w(x) dx \right\} \\ &= \sum_i [P_s'' w']_{x_{i-1}}^{x_i} = P_s''(b)w'(b) - P_s''(a)w'(a) = 0 \end{aligned}$$



Wie bei Polynom-IP, hat auch für Splines die Wahl der Darstellung, d. h. der Basis, Auswirkungen bzgl. Anplenen, Stabilität, etc. ①

## Def 1.41 B-Splines

Seien Stützstellen  $x_i$ ,  $i=0 \dots n$  gegeben und aufsteigend sortiert.

Seien weiter  $x_{-k} \leq x_{-k+1} \leq \dots \leq x_{-1} \leq x_0$ , sowie  
 $x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq x_{n+k}$

$2k$  beliebige Hilfsknoten.

Die B-Splines vom Grad  $k$  sind rekursiv definiert durch

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & : x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x)$$

$$\text{mit } w_{i,k} = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} & : t_i \neq t_{i+k} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Anm: große Ähnlichkeit zu Div. Diff.

Bsp  $\rightarrow$  Folien

## Satz 1.42 Eigenschaften der B-Splines

(2)

i)  $B_{i,k} |_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_k$

ii)  $\text{supp}(B_{i,k}) \subset [x_i, x_{i+k+1}]$

$\rightarrow B_{i,k} \equiv 0$  falls  $x_i = x_{i+k+1}$

iii)  $B_{i,k} \geq 0$  und  $\sum_i B_{i,k}(x) = 1 \quad \forall x \in [x_0, x_n]$

(auf ganz  $\mathbb{R}$  für  $n \rightarrow \infty$ , eigentlich äquivalent)

iv) Falls  $x_i < x_{i+1} \quad \forall i \in -k, \dots, n+k$ , dann bildet  $(B_{i,k})$  eine Basis von  $\mathcal{S}_{\Delta}^{k,k-1}$

Beweis: ohne Beweis

Beispiele  $\rightarrow$  Folien

## 2 Numerische Integration

Ziel: num. Auswerten von Integralen ...

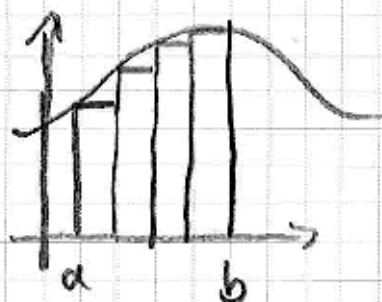
Approximation von

$$I(f) = \int_a^b \omega(x) f(x) dx$$

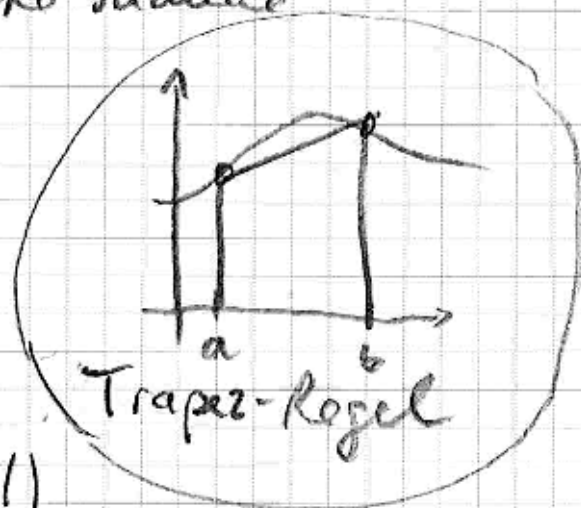
für  $f \in C^k(a,b)$  und

$\omega \in L^1(a,b)$  eine (vorgegebene)  
Gewichtsfunktion

Idee: Integral  $\rightarrow$  diskrete Summe



Untersumme  
(Riemannsches Integral)



Trapez-Regel

## Def 2.1 Quadratur

(4)

Ein Funktional  $I_n: C^k(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{m_j-1} f^{(l)}(x_j) \omega_j^l$$

heißt Quadraturformel mit Stützstellen  $x_j \in [a,b]$  und Gewichten  $\omega_j^l \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m_j \in \{1, \dots, k+1\}$  und  $n+1 = \sum m_j$ .

$I_n$  heißt exakt für  $P_n$ , wenn

$$I_n(p) = \int(p) \quad \forall p \in P_n$$

Anmerkung In der Regel betrachten wir nun Quadraturen der Form

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \omega_j f(x_j)$$

(d.h.  $m_j = 1$ )

Bsp 2.2 Mittelpunktsregel:  $I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Trapezregel:  $I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$

Simpsonregel:  $I_2(f) = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$



5

Satz 2.3 Gegeben  $w \in L^1(a,b)$ ,  
pos. w. unversch. St.  $x_0, \dots, x_n$ , dann  $\exists$  genau eine  
Quadraturformel der Form

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n w_j f(x_j),$$

welche exakt ist auf  $P_n$

Die Gewichte sind

$$w_j = \int_a^b w(x) L_j^n(x) dx,$$

$$L_j^n(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{(x - x_l)}{(x_j - x_l)} \quad \text{Lagrange - Pol.}$$

Beweis  $I_n(p) = I(p) \quad \forall p \in P_n$

$$\Leftrightarrow I_n(L_\ell^n) = I(L_\ell^n) \quad \forall \ell \in \{0, \dots, n\}$$

(Recher. gilt) weil  $I_n$  &  $I$  lin. Op &  $L_\ell^n$  Basis von  $P_n$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^n w_j \underbrace{L_\ell^n(x_j)}_{\delta_{j\ell}} = \int_a^b w(x) L_\ell^n(x) dx$$

"  
 $w_\ell$

□

Was, wenn  $f \notin P_n$ ?

(6)

Sei  $p_n \in P_n$  (das eindeutige)  $I$ -Pzer

$(x_0, f_0) \dots (x_n, f_n)$ , dann gilt

$$\underline{I_n(f)} = \sum_{l=0}^n w_l f(x_l) = \sum_{l=0}^n \int_a^b w(x) L_l^n(x) f(x_l) dx$$

$$= \int_a^b w(x) \underbrace{\sum_{l=0}^n L_l^n(x) f(x_l)}_{P_n(x)} dx = \underline{I(p_n)}$$

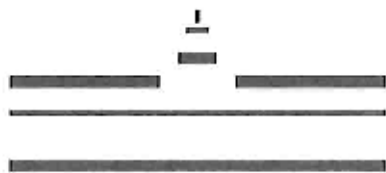
Def 2.4  $I_n(f) = \sum w_l f(x_l)$  mit  $\forall t \ a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$

und  $w \in L^1(a,b)$  heißt

Interpolationsquadratur, (IQ)

wenn sie exakt auf  $P_n$  ist.

(nach 2.3 auch eindeutig)



Satz 2.5 Symmetrie: Sei  $I_n \in \mathcal{I}Q$  und es gelte

i)  $x_j - a = b - x_{n-j}$  Symmetrie bzgl.  $\frac{a+b}{2}$

ii)  $w(x) = w(a+b-x)$  gerade Funktion bzgl.  $\frac{a+b}{2}$

Dann gilt auch

$$w_{n-j} = w_j \quad (0 \leq j \leq n)$$

Ist  $n$  gerade, so ist  $I_n$  exakt auf  $P_{n+1}$

Ohne Beweis

Satz 2.6 Fehlerabschätzung

Sei  $I_n \in \mathcal{I}Q$  auf  $P_n(a,b)$ ,  $w(x) \equiv 1$  und

$R_n(f) := I_n(f) - I(f)$  das Fehlerfunktional.

Dann gilt

$$i) |R_n(f)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

$\forall f \in C^{n+1}$  falls  $n$  gerade

$$ii) |R_n(f)| \leq \frac{\|f^{(n+2)}\|_\infty}{(n+2)!} (b-a)^{n+3}$$

$\forall f \in C^{n+2}$

falls  $n$  ungerade & 2.5 (i) gilt

Beweis: i)  $I_n(f) = I(p_n)$ ,  $p_n$  IP zu  $(x_i, f(x_i))$  (8)

$$\Rightarrow \|R_n(f)\| = \left| \int_a^b f - p_n dx \right| \leq \int_a^b |f - p_n| dx$$

$$\stackrel{\text{(Satz 1.6)}}{=} \int_a^b \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| dx$$

$\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \leq (b-a)$

$$\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

ii) noch 2.5 gilt  $I_n(f) = I(p_{n+1})$ , dann analog zu i)

Anmerkung

i) kann verallgemeinert werden zu  $w \in L^1(a, b)$  □

ii)  $(b-a)^{n+1}$  kann für gegebene SSF schärfer abgeschätzt werden als  $K(b-a)^{n+1}$ ,  $K \ll 1$ .

Ziel QR nicht immer neu berechnen

Ausatz Transformation auf Referenzintervall

üblich  $[0, 1]$ , oder  $[-1, 1]$

Satz 2.7 Sei  $\hat{I}_n = \sum_{k=0}^n \hat{\omega}_k \hat{f}(t_k)$ ,  $t_k \in [-1, 1]$  eine IQ.

Dann ist  $I_n(f) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k)$  IQ auf  $[a, b]$

mit  $\omega_k = \frac{b-a}{2} \hat{\omega}_k$ ,  $x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{b+a}{2}$

Für  $\|\hat{R}_n(\hat{f})\| \leq K \|\hat{f}^{(m)}\|_{\infty} 2^{m+1}$  folgt  $\|R_n(f)\| \leq K \|f^{(m)}\|_{\infty} (b-a)^{m+1}$

9

Beweis: Einsetzen, nachrechnen

□

Anmerkung i) es reicht also einmal die Gewichte und Stützstellen zu konstruieren.

Zu  $-1 \leq t_0 < \dots < t_n \leq 1$  ist

$$\hat{\omega}_j = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k} dt$$

ii) Es gilt  $\sum_k \hat{\omega}_k = 2$ ,  $\sum_k \omega_k = b - a$

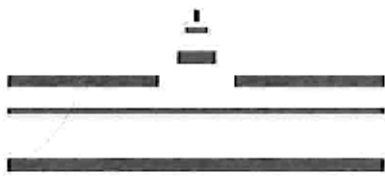
da  $I_n(1)$  exakt ist

ii) Wie bei Polyn. IP Probleme für großes  $n$ , z.B. negative Gewichte  
→ Auslöschung

Idee: Zusammengesetzte Quad.

$$\int_a^b f dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} f dx$$





→ was wir bisher vor allem im Blick hatten

## Def 2.8 Newton-Cotes Formeln

sind  $\mathbb{I}, \mathbb{Q}$  mit  $n$  äquidistante Stützstellen  $x_k = a + kh$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Die offenen Newton-Cotes Formeln haben

SSt.  $x_k = a + (k+1)h$ ,  $h = \frac{b-a}{n+2}$ , d.h. Randp.

$a, b$  sind keine SSt.

Beispiele •  $n=1$  Trapezregel,  $x_0 = a, x_1 = b$

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{b-a}{2}$$

•  $n=2$  Simpson-Regel

Bemerkung Bei Newton-Cotes Formeln

Bis  $n=6$  bleiben alle Gewichte positiv.

Bei offenen Newton-Cotes Formeln nur bis  $n=2$

Erinnerung: wenn Probleme für großes  $n$

→ Neen?

→ optim. Stützstelle

→ oder stückweise Konstruktion

## 2.2 Gauß-Quadratur

(2)

Ziel: Quad.  $Q_n$ , welche für  $P_m$  exakt ist mit maximalem  $n$ .

Beobachtung: für  $m = 2n + 2$  nicht möglich  
→ Beweis durch Widerspruch (siehe z.B. Rannacher)  
(aber für  $m = 2n + 1$  → diese VL)

### Def 2.9 Gauß-Quad

Sei  $w \in L^1(a, b)$  gegeben. Eine QF

$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$  heißt Gauß-Quad.

falls  $Q_n$  auf  $P_{2n+1}$  exakt ist.

2.10

Wir betrachten Knotenpolynom  $p_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$

$(p_{n+1})^2$  hat Grad  $2n+2$ , dann gilt  $\int_a^b w(x) (p_{n+1}(x))^2 dx - \sum_{i=0}^n w_i (p_{n+1}(x_i))^2 > 0$

$$R((p_{n+1})^2) = \int_a^b w(x) (p_{n+1}(x))^2 dx - \underbrace{\sum_{i=0}^n w_i (p_{n+1}(x_i))^2}_{=0} > 0$$

Für  $p \in P_{2n+1}$  gilt mit Polynomdivision

$$p = q p_{n+1} + r \quad \text{mit } q, r \in P_n$$



Satz 2.10 Sei  $\omega \in L^1(a, b)$ ,  $Q_n = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k)$ ,  
 $P_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

i)  $Q_n$  ist GQ

ii)  $Q_n$  ist IQ und

$$\int_a^b \omega(x) P_{n+1}(x) q(x) dx = 0 \quad \forall q \in P_n$$

Beweis (i)  $\rightarrow$  (ii):

$$\begin{aligned} q \in P_n &\Rightarrow \int_a^b \omega P_{n+1} q dx = Q_n(P_{n+1} q) \\ &= \sum_k \omega_k \underbrace{P_{n+1}(x_k)}_{=0} q(x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii)  $\rightarrow$  (i):  $P \in P_{n+1}$ ,  $P = q P_{n+1} + r$ ,  $q, r \in P_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b \omega P dx &= \int_a^b \omega (q P_{n+1} + r) dx = 0 + Q_n(r) \\ &= Q_n(q P_{n+1}) + Q_n(r) = Q_n(P) \end{aligned}$$

## Def 2.11

(4)

i)  $w \in L^1(a, b)$  heißt zulässige Gewichtsfunkt,  
falls  $w \geq 0$  und  $\int_a^b w(x) dx > 0$

ii) dann definiert

$$\langle p, q \rangle_w := \int_a^b w(x) p(x) q(x) dx$$

ein SP auf  $P_n$

→ Konstruieren von Stützstellen, so dass

das Knotenpolynom  $P_{n+1} \perp P_n$  bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ .

Satz 2.12

→ Gram-Schmidt zur Monombasis  $(m_k)$ ,  $m_k = x^k$

$$P_0 = 1$$

$$P_{k+1} = x^{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{\langle x^{k+1}, P_i \rangle_w}{\langle P_i, P_i \rangle_w} P_i(x)$$

liefert (eindeutiges)  $P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

mit  $\langle P_{n+1}, q \rangle_w = 0 \quad \forall q \in P_n$

und  $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  ist Orthonormalbasis von  $P_{n+1}$

bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$

→ zumindest einen Ansatz kennen wir  
schon: Tschebyscheff-Polynome mit

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



## Eigenschaften?

5

Satz 2.13 Sei  $w$  zeit. Gewichtsfunkt., dann

liegen die Nullst. von  $P_{n+1}$  (aus Satz 2.12) in  $(a, b)$ ,  
sind reell und einfach.

Beweis: durch Widerspruch

$N_n := \{ \lambda \in (a, b) \mid \lambda \text{ Nullst. ungerader Vielfachheit von } P_{n+1} \}$

und  $\left. \begin{array}{l} q(x) = 1 \quad \text{falls } N_n = \emptyset \\ q(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i) \quad \text{für } N_n = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_m \} \end{array} \right\} \in P_n$   
men

Dann ist  $P_{n+1} \cdot q \in P_{n+m+2}$  reell ohne Vorzeichenwechsel,  
(da jedes  $(x - \lambda_i)$  in gerader Potenz vorkommt)

$$\Rightarrow \langle P_{n+1}, q \rangle_w$$

$$\int_a^b \underbrace{P_{n+1}}_{>0} q \underbrace{w}_{>0} dx > 0 \quad \text{zu } \langle P_{n+1}, q \rangle = 0 \quad \forall q \in P_n$$

□

Satz 2.14 Sei  $w$  auf  $G$  Gew. f. u. t.

$f$  genau eine GQ  $Q_n$  für  $w$ . Deren SST sind die Nullst. von  $P_{n+1}$  aus 2.12.

Gewichte sind gegeben durch

$$\omega_j = \int_a^b w(x) L_j^2(x) dx$$

$$\text{mit } L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

Insbesondere gilt  $\omega_j > 0 \forall j$ .

Beweis Erster Teil nach Konstruktion,

z. z.  $\omega_j > 0 \forall j$  Betrachte  $Q_n(L_j^2) \forall j, L_j^2 \in \underline{\underline{P_{2n}}}$

$$0 < \int_a^b w(x) L_j^2(x) dx = Q_n(L_j^2) = \sum_{k=0}^n \omega_k \underbrace{L_j^2(x_k)}_{\delta_{jk}^2} = \omega_j \quad \square$$

Anmerkung Für  $f \in C(a,b)$  konvergiert die GQ

$$Q_n(f) \rightarrow I(f) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$



### Satz 2.15

Sei  $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$  IP mit  $p(x_i) = f(x_i)$ ,

$p'(x_i) = f'(x_i)$  (Hermite-IP) und

$x_i$  Nullst. von  $p_{2n+1}$  aus 2.12, dann

gilt  $Q_n(f) = Q_n(p) = I(p)$

ohne Beweis

### Beispiele 2.17

→ Folien

### 2.3 Zusammengesetzte Quadraturen

$$\text{Idee: } \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$$

mit  $a = a_0 < \dots < a_N = b$

## Satz 2.16 Zusammengesetzte Quadratur (P)

Sei  $\hat{I}_n(\hat{f})$  IQ auf  $[-1, 1]$  mit  $|\hat{R}_n(\hat{f})| \leq K \| \hat{f}^{(m)} \|_{\infty} \frac{1}{2^{m+1}}$

( $m$  ist  $n$  oder  $n+1$ , je nach Konstruktion)

$$\text{Dann ist } \underline{I}_h(f) = \frac{H}{2} \sum_{l=1}^N \underbrace{\sum_{k=0}^m \hat{\omega}_k}_{I_h^l} f \left( \frac{H}{2} (t_k - 1) + a + lH \right)$$

mit  $H = \frac{b-a}{n}$  eine Quadratur mit

$$|R_n(f)| \leq K \| f^{(m)} \|_{\infty} (b-a) H^m$$

Beweis Transformation auf Intervalle  $[a_{l-1}, a_l]$

$$\Rightarrow |R_n(f)| \leq \sum_{l=1}^N |R_n^l(f)|$$

$$\stackrel{(\text{Satz 2.7})}{\leq} \sum_{l=1}^N K \| f^{(m)} \|_{\infty, l} \underbrace{(a_l - a_{l-1})}_{H}^{m+1}$$

$$\leq K \| f^{(m)} \|_{\infty} \underbrace{NH}_{=(b-a)} H^m$$

□

Def 2.17 Zusammengesetzte Gauß-Quadratur (9)

Setze  $a_l = a + lH$ ,  $l \in \{0, \dots, N\}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $H = \frac{b-a}{N}$

Sei  $Q_n^l(f)$  eine GQ auf  $[a_{l-1}, a_l]$ , dann

ist

$$Q_h(f) = \sum_{l=1}^N Q_n^l(f)$$

eine zusammengesetzte GQ.

### Beispiele

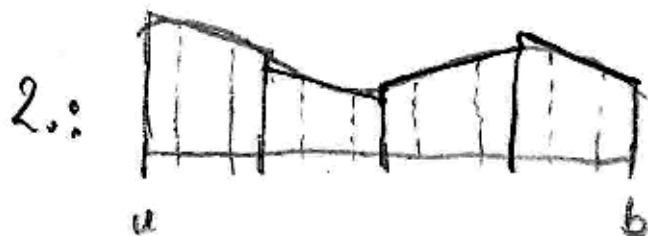
1. Zusammengesetzte Trapezregel ( $n=1$ ).

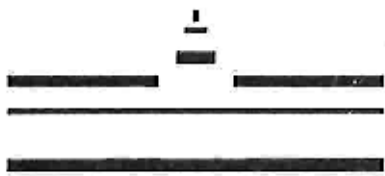
$$\begin{aligned} T_h(f) &= \frac{H}{2} \sum_{l=1}^N [f(a+lH-H) + f(a+lH)] \\ &= \frac{H}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{l=1}^{N-1} f(a+lH) \right] \end{aligned}$$

2. Zusammengesetzte 27-Punkt GQ ( $n=1, w=1$ )

$$Q_h(f) = \frac{H}{2} \sum_{j=0}^{N-1} f(a_j + h') + f(a_{j+1} - h')$$

mit  $h' = \frac{H}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$





## 3 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

[zunächst etwas Def. & Theorie ...]

### Def 3.1 Gewöhn. DGL

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall

$F: I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

Für Fkt  $y \in C^n(I)$  beschreibt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (x \in I)$$

eine skalare, gewöhnliche Differentialgleichung  
(DGL)

Eine explizite gew. DGL hat die Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

mit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Anmerkung DGL  $n$ -ter Ordnung kann als System aus  $n$  1-ter-Ordnung DGLen geschrieben werden:

$Y_i = y^{(i)}$   $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \text{ und } Y'(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \vdots \\ Y_{n-1}(x) \\ f(t, Y_0(x), \dots, Y_{n-1}(x)) \end{pmatrix}$$

Def 3.2 (Anfangswertproblem)

Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  Intervall &  $G \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und offen,  $f: I \times G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $y_0 \in G$ .

Dann beschreibt

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit  $y(a) = y_0$  ein AWP.

$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist Lösung des AWP und

$$y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \text{ und } y(x) \in G \quad \forall x \in I.$$

→ Bsp 3.3

### Beispiel 3.3 Dreikörperproblem

Bewegung von Himmelskörpern, in allgemeinen  
nicht analytisch lösbar.

[www.cells-in-motion.de](http://www.cells-in-motion.de) (Arbeiten z.B. von Euler, Lagrange)

$$m_i \ddot{x}_i = G m_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (2)$$

Pos. Vektor

folgt aus Newtonschen Gesetzen

Beschleunigung (links) = Kraft (rechts)

Gravitationskraft:  $G m_1 m_2 d^{-2}$ ,  $d$ : Abstand

→ Python-Programm



③

Anmerkung nach Fundamentalsatz der  
Differential- & Integralrechnung gilt

(Satz 3.4)  $y \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$  genau dann Lösung des AWP,  
wenn

$$y(x) = y_0 + \int_a^b f(s, y(s)) ds, \quad x \in I$$

(Integralgleichung) erfüllt ist.

↳ deswegen hatten wir Kapitel 2 ☺

Def 3.5 (Picard-Lindelöf Iteration)

$$T: C^0(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$$

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_a^x f(s, y(s)) ds$$

Folge  $y^{(0)} \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $y^{(m+1)} = T y^{(m)}$  beschw.

Fixpunkt-Iterationen, FP  $\tilde{y}$  mit  $T\tilde{y} = \tilde{y}$  ist

Lös des AWP.

[Wann konvergiert PLI?]

Def 3.6 (Lipschitz)

Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $f: X \rightarrow Y$  heißt  
Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ ,

wenn 
$$\| f(x) - f(\tilde{x}) \| \leq L \| x - \tilde{x} \| \quad \forall x, \tilde{x} \in X.$$

Satz 3.7 (Picard-Lindelöf, lokale Eindeutigkeit)

Seien Voraussetz. wie 3.2 und  $f$  Lipschitz im

2. Argument

d.h. 
$$\| f(x, y) - f(x, z) \|_{\infty} \leq L \| y - z \|_{\infty}$$

Dann hat das AWP lokal eine eindent. Lsg  $\tilde{y}$ . [S. 10, 11]

D.h.  $\exists \varepsilon > 0, \exists \tilde{y} \in C^1(I_{\varepsilon}, \mathbb{R}^n)$ ,  $\tilde{y}$  löst AWP auf

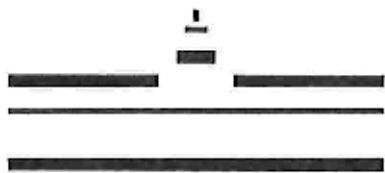
$$I_{\varepsilon} = [a, a + \varepsilon]$$

Beweis 
$$\begin{aligned} \| (Ty)(x) - (Tz)(x) \|_{\infty} &= \left\| \int_a^x f(s, y) - f(s, z) ds \right\|_{\infty} \\ \text{(Lipschitz)} \quad &\leq L \int_a^x \| y(s) - z(s) \|_{\infty} ds \\ &\leq L \| y - z \|_{\infty} (x - a) \\ &\leq L \varepsilon \| y - z \| \quad \forall x \in I_{\varepsilon} \end{aligned}$$

Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $L\varepsilon < 1 \rightarrow$  Kontraktion

+ Banach. FP-Satz





Beim ohne Lipschitz-Bedingung könnte  
wird keine Konfraktion zeigen, aber auch  
echt notwendig:

$f(x, y) = \sqrt{y}$  ist nicht Lipschitzstetig um  $y=0$

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

hat 2 Lösungen  
für  $x > 0$ :

$$y(x) = 0 \quad \text{und} \quad y(x) = \frac{x^2}{4}$$

Satz 3.8 (Picard-Lindelöf, global)

zusätzlich zu 3.7 gelte

$$\|f(x, y)\|_{\infty} \leq M \quad \forall (x, y) \in I \times G$$

$$\text{und } G \supseteq \overline{B_{\sigma}(y_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y_0\|_{\infty} \leq \sigma\}$$

$$\text{und } \sigma \geq (b-a)M$$

(Anm.  $I \times B_{\sigma}$  ist  $(n+1)$ -dim Rechteck (Zylinder))

↗

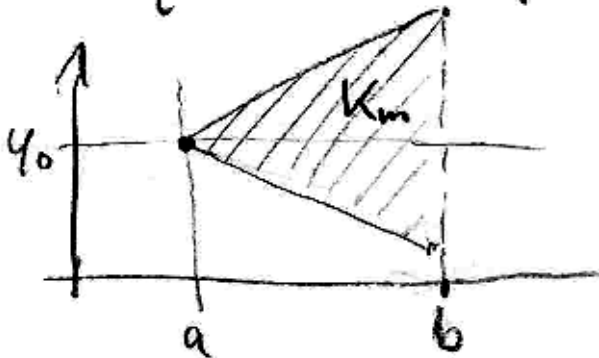
⑥

dann gilt

i)  $\exists$  genau eine Los  $\tilde{y}$  des AWP auf  $I$

ii)  $\forall x \in I$  gilt  $(x, \tilde{y}(x)) \in K_M(a, y_0)$

$$K_M := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\|_\infty \leq M|x - a|\} \cap (I \times G)$$



iii) Picard-Lindelöf-Iteration konvergiert gleichmäßig auf  $I$  gegen  $\tilde{y}$ .

Für den Fehler gilt

$$\|\tilde{y}(x) - y^{(k)}(x)\|_\infty \leq \frac{L^k (x-a)^k}{k!} e^{L(x-a)}$$

ohne Beweis

Ähnliche Existenzaussage liefert den



### Satz 3.9 (Satz von Peano)

$f(x, y)$  stetig auf Zylinder  $S = I \times B_0$   
(Ann: Senkrecht  $K_m$ !), dann  $\exists$  eine  
Lösung  $\tilde{y}$  des AWP auf  $I$

Beweis: z. B. Walter (gew. DGL)  
Rammacher (Num. 1)

Anmerkung Peano sagt nur Existenz vorher,  
keine Eindeutigkeit

### Beispiel 3.10 Picard-Lindelöf-Iterationen

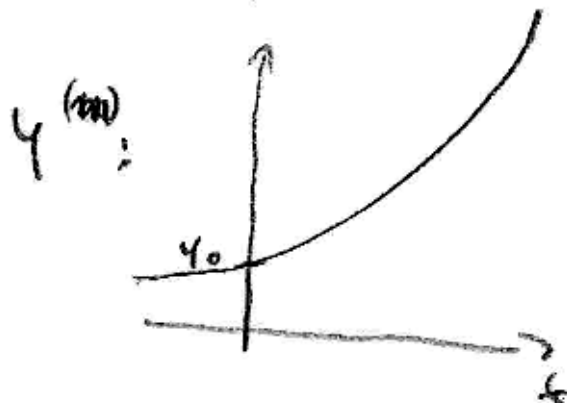
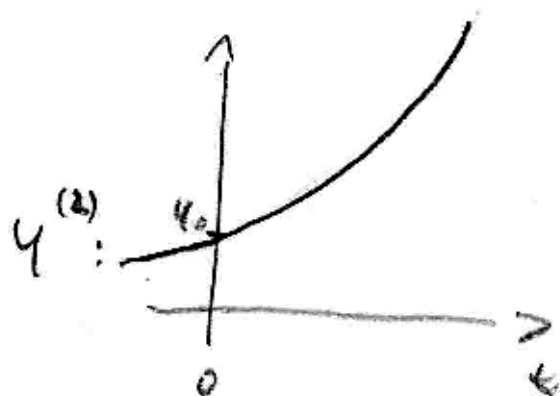
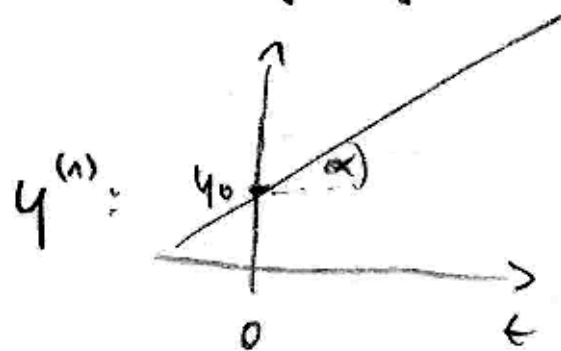
Bakterienanzahl (Dichte in Nährstofflösung)

$$y'(t) = \alpha y(t), \alpha > 0, y_0 > 0$$

$$y^{(1)} = T(y_0)(t) = y_0 + \int_0^t \alpha y_0 dt = y_0(1 + \alpha t) \quad (\text{P})$$

$$y^{(2)} = T(y^{(1)})(t) = y_0 + \int_0^t \alpha y_0(1 + \alpha t) dt = y_0 \left( 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right)$$

$$y^{(m)} = y_0 \sum_{j=0}^m \frac{(\alpha t)^j}{j!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_0 e^{\alpha t}$$



Stabilitätsbetrachtungen numerischer Verfahren  
 erfordern die Abschätzung des unvermeidbaren  
 Fehlers durch Rundung der Eingangsdaten  $y_0$ .

Wichtiges Werkzeug:

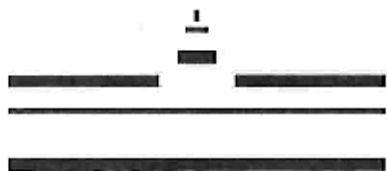
Lemma 3.11 (Gronwall)

Sei  $p, q \in C^0(I)$ ,  $p, q \geq 0$ . Erfüllt

$u: I \rightarrow \mathbb{R}$  die Bed.

$$0 \leq u(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s) u(s) ds \quad \forall x \in I$$





dann gilt:

$$0 \leq u(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s) p(s) \exp(Q(s,x)) ds$$

mit  $Q(s,x) = \int_s^x q(\tau) d\tau$

○ Beweis:  $\rightarrow$  Übungsaufgabe

Satz 3.12 (Stetigkeitssatz für AWP)

Voraussetzungen wie bei 3.7 (PLI lokal)

Sei  $\tilde{y}$  Lsg des AWP,  $\tilde{z}$  Lsg des gestörten Problems

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) + \varepsilon(x) \\ z(a) = z_0 \in G \end{cases}$$

Sei  $\|z_0 - y_0\| \leq \tilde{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\varepsilon(x)\|_\infty \leq \hat{\varepsilon}$   
 $\forall x \in I$

Dann gilt

$$\|\tilde{z}(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty \leq (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}(x-a)) e^{L(x-a)}$$

Beweis: Folgt direkt aus 3.7

$$e(x) := \| \tilde{z}(x) - \bar{y}(x) \|_\infty$$

$$\Rightarrow e(x) = \left\| z_0 + \int_a^x f(\tau, \tilde{z}(\tau)) - \varepsilon(\tau) d\tau - y_0 - \int_a^x f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau \right\|_\infty$$

$$\stackrel{(3.7)}{\leq} \underbrace{\| z_0 - y_0 \| - \hat{\varepsilon}(x-a)}_{p(x)} + \int_a^x L e(\tau) d\tau$$

$$= p(x) + \int_a^x q(\tau) e(\tau) d\tau$$

mit  $q(\tau) = L$ ,  $p(x) = \tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}(x-a)$

(Gronwall)

$$\Rightarrow e(x) \leq \tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}(x-a) + L \int_a^x (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}(\tau-a)) e^{L(\tau-a)} d\tau$$

Lösen des Integrals liefert Behauptung



## 3.2 Diskrete Verfahren für AWP

Wir betrachten: -  $I = [a, b]$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- skalare AWP 
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- alle Bed. (Lipschitz, zusammenhängend, etc) seien erfüllt

-  $\tilde{y}$  sei die exakte Lösung auf  $I$

### Def 3.13 Disk. Verf für AWP

Definiere Gitter  $I_h = \{x_0, \dots, x_n\} \in I$

- Stützstellen  $x_{j+1} = x_j + h_j$ ,  $h_j > 0$ ,  $j = 0, \dots, n-1$

Schrittweite  $h_j$ ,  $h := \max_j h_j$  als Feinheit von  $I_h$

Ein numerisches Verfahren liefert für Knoten  $x_i \in I_h$  eine Approximation

$$y_i := y_h(x_i) \approx \tilde{y}(x_i).$$

$y_h$  heißt diskrete Lösung des AWP

## Def 3.14 Globaler Fehler

(2)

Fehlerfunktion  $e_h(x) := \tilde{y}(x) - y_h(x)$ ,  $x \in I$

Definiere

$$e_i := e_h(x_i), \quad x_i \in I_h$$

$\|e_h\| := \max_i |e_i|$  heißt Diskretisierungsfehler

## Def 3.15 Konvergenz

Ein diskretes Verfahren heißt konvergent

(von Ordnung  $p$ ), falls

$$\|e_h\| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$
$$(\|e_h\| = \mathcal{O}(h^p))$$

Wie kommt man zur diskreten Lösung?

Iterativ  $y_i \rightarrow y_{i+1}$

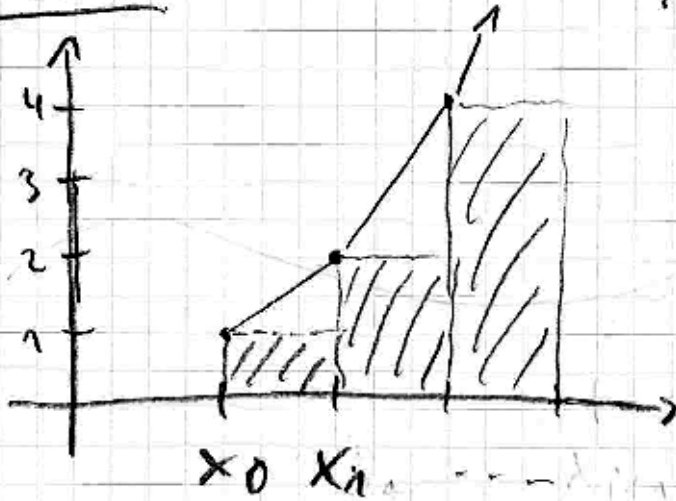
Kontinuierlich:  $y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$

Approximieren  
via Quadratur

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, u_i, h)$$

Bsp 3.16

Eulersches Polygonzug-Verfahren



$$f(x, y) = y$$

$$\int_{x_0}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f(x_i, y_i)$$

$$x_0 = 1$$

$$h = 1$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + 1$$

$$x_2 = 2 + 2$$

⋮

Def 3.17 Explizite Einzelschritt Verfahren (ESV)

gegeben ein zeitabhängiges Gitter  $I_h$  und eine  
Verfahrensfunktion  $\varphi(x, u, h)$ .

ein explizites ESV liefert  $y_h$  als

$$y_{j+1} = y_j + h_j \varphi(x_j, y_j, h_j)$$

mit  $y_h(x_j) = y_j$ .

$\varphi$   
nur alte Werte

$\hat{=}$  Interpolierende Eigenschaft von  $y_h$

## Beispiele 3.1P

(4)

i) Explizites Eulerverfahren:

$$\varphi(x, y, h) = f(x, y(x))$$

$$\text{d.h. } \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

ii) Modifiziertes Eulerverfahren:

Mittelpunktsregel

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, \underbrace{y\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right)}_?\right)$$

Extrapolation mittels expl. Euler

d.h. eigentlich Romberg-Integration  
(wie auf ü-Zettel)

$$\rightarrow \varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$

iii) ~~...~~

$$\left[ \begin{array}{l} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i) \\ \sim \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \sim \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$





iii) Verbessertes Eulerverfahren

Trapezregel

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h_i \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))}{2}$$

was (erstmal) nicht geht:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

↑ unbekannt!

wieder Extrapolation

$$f(x, y, h) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(x+h, y + f(x, h)))$$

Aber wie gut funktionieren die Verfahren?

Def 3.19 Abschneidefehler / Konsistenz ⑥

- Für diskretes Verfahren  $y_h(x+h) = y_h(x) + h f(x, y_h)$  heißt

$$\tau_h(x) := \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} - f(x, \tilde{y}(x), h)$$

[und  $\tau_i = \tau_h(x_i)$ ]  $h$   
lokaler Abschneidefehler oder  
Diskretisierungsfehler

- Das Verf heißt konsistent  
(von Ordnung  $p$ ) falls

$$\max_i \|\tau_i\| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

$$(\max_i \|\tau_i\| = \mathcal{O}(h^p))$$

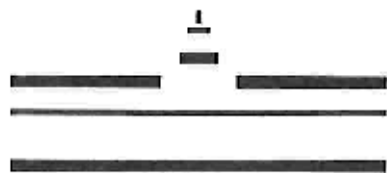
Beispiel 3.20 Abschneidefehler Expl Eulerv.

$$\tau_i = \frac{\tilde{y}(x_{i+1}) - \tilde{y}(x_i)}{h_i} - f(x_i, \tilde{y}(x_i))$$

Taylorreihe:  $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}(x_i) + h_i \tilde{y}'(x_i) + \mathcal{O}(h_i^2)$

$$\Rightarrow \tau_i = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h_i^2)}{h_i} - \underbrace{f(x_i, \tilde{y}(x_i))}_{=y'(x_i)} = \mathcal{O}(h)$$

$\Rightarrow$  Konsistent von Ordnung 1



### Lemma 3.20 Diskretes Gronwall Lemma

Seien  $p_n, q_n, e_n$  positive Folgen mit

$$e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n \quad \forall n < N$$

dann gilt

$$e_n \leq \left( e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right)$$

Beweis: vollst. Induktion

Anfang:  $e_1 \leq (1+q_0)e_0 + p_0 \leq \underbrace{\exp(q_0)}_{\geq 1+q_0} e_0 + \exp(q_0) p_0$

Schritt:  $e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n$

$$\leq \exp(q_n)e_n + \exp(q_n)p_n$$

$$= \exp(q_n) \left[ \left( e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right) + p_n \right]$$

$$\leq \exp(q_n) \left[ \left( e_0 + p_n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right) \right]$$

$$= \left( e_0 + \sum_{j=0}^n p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^n q_j \right)$$

□

### Satz 3.21 Konvergenz von ESV

(8)

Gegeben ESV mit Verfahrensformel  $f(x, y, h)$ .

Sei  $f$  global Lipschitzstetig bzgl.  $y$  mit Konstante  $L$ , dann gilt:

Ist das ESV konsistent (mit Ordnung  $p$ )

so ist es auf  $I$  konvergent ( $\rightarrow$ ).

Beweis Sei  $a \leq x < x+h \leq b$

$$\text{Es gilt } \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} = f(x, \tilde{y}(x), h) + \tau_h(x, \tilde{y})$$

$$\rightarrow \tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j = h_j f(x_j, \tilde{y}_j, h_j) + h_j \tau_j \quad \forall j=0, \dots, n-1$$

Lipschitz  $\Rightarrow$

$$|e_{j+1}| \leq |e_j| (1 + h_j L) + |\tau_j| h_j$$

Gronwall  
 $\Rightarrow$

$$\|e_n\| \leq [ |e_0| + (b-a) \max_j \tau_j ] \exp(b-aL)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= O(h^p)}$

$$\leq O(h^p)$$

□

## 3.2 Diskrete Verfahren für AWP

Wir betrachten: -  $I = [a, b]$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- skalare AWP 
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

○ - alle Bed. (Lipschitz, zusammenhängend, etc) seien erfüllt

-  $\tilde{y}$  sei die exakte Lösung auf  $I$

### Def 3.13 Disk. Verf für AWP

Definiere Gitter  $I_h = \{x_0, \dots, x_n\} \in I$

○ Stützstellen<sup>a</sup>  
 $x_{j+1} = x_j + h_j$ ,  $h_j > 0$ ,  $j = 0, \dots, n-1$

Schrittweite  $h_j$ ,  $h := \max_j h_j$  als Feinheit von  $I_h$

Ein numerisches Verfahren liefert für Knoten  $x_i \in I_h$  eine Approximation

$$y_i := y_h(x_i) \approx \tilde{y}(x_i).$$

$y_h$  heißt diskrete Lösung des AWP

## Def 3.14 Globaler Fehler

(2)

Fehlerfunktion  $e_h(x) := \tilde{y}(x) - y_h(x)$ ,  $x \in I$

Definiere

$$e_i := e_h(x_i), \quad x_i \in I_h$$

•  $\|e_h\| := \max_i \|e_i\|$  heißt Diskretisierungsfehler

## Def 3.15 Konvergenz

Ein diskretes Verfahren heißt konvergent

(von Ordnung  $p$ ), falls

$$\|e_h\| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

( $\|e_h\| = O(h^p)$ )

Wie kommt man zur diskreten Lösung?

Iterativ  $y_i \rightarrow y_{i+1}$

Kontinuierlich:  $y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$

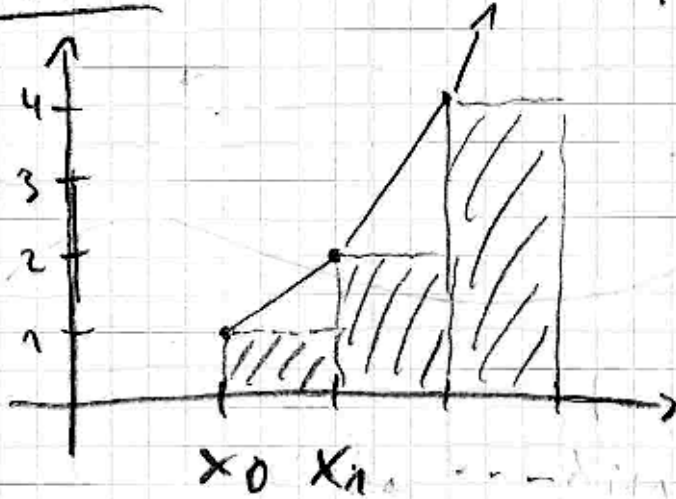
Approximieren  
via Quadratur

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, u_i, h)$$



Bsp 3.16

Eulersches Polygonzug-Verfahren



$$f(x, y) = y$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f(x_i, y_i)$$

$$x_0 = 1$$

$$h = 1$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + 1$$

$$x_2 = 2 + 2$$

⋮

Def 3.17 Explizite Einzelschritt-Verfahren (ESV)

gegeben ein zeitliches Gitter  $T_h$  und eine Verfahrensfunktion  $f(x, u, h)$ .

ein explizites ESV liefert  $y_h$  als

$$y_{j+1} = y_j + h_j f(x_j, y_j, h_j)$$

mit  $y_h(x_j) = y_j$ .

↑  
nur alte Werte

↑ Interpolierende Eigenschaft von  $y_h$

## Beispiele 3. 1P

(9)

i) Explizites Eulerverfahren:

$$\varphi(x, y, h) = f(x, y(x))$$

$$\text{d.h. } \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

ii) Modifiziertes Eulerverfahren:

Mittelpunktsregel

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, \underbrace{y\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right)}_?\right)$$

Extrapolation mittels expl. Euler

d.h. eigentlich Romberg-Integration  
(wie auf ü-Zettel)

$$\rightarrow \varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$

iii) ~~Modifiziertes Eulerverfahren~~

$$\left[ \begin{array}{l} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$



iii) Verbessertes Eulerverfahren

Trapezregel

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h_i \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))}{2}$$

was (erstmal) nicht geht:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

↑ unbekannt!

wieder Extrapolation

$$f(x, y, h) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(x+h, y+f(x, h)))$$

Aber wie gut funktionieren die Verfahren?

Def 3.19 Abschneidefehler / Konsistenz ⑥

- Für diskretes Verfahren  $y_h(x+h) = y_h(x) + h f(x, y_h)$  heißt

$$\tau_h(x) := \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} - f(x, \tilde{y}(x), h)$$

[und  $\tau_i = \tau_h(x_i)$ ]  
lokaler Abschneidefehler oder  
Diskretisierungsfehler

- Das Verf heißt konsistent  
(von Ordnung  $p$ ) falls

$$\max_i \|\tau_i\| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

$$(\max_i \|\tau_i\| = \mathcal{O}(h^p))$$

Beispiel 3.20 Abschneidefehler Expl Eulerv.

$$\tau_i = \frac{\tilde{y}(x_{i+1}) - \tilde{y}(x_i)}{h_i} - f(x_i, \tilde{y}(x_i))$$

Taylorreihe:  $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}(x_i) + h_i \tilde{y}'(x_i) + \mathcal{O}(h_i^2)$

$$\Rightarrow \tau_i = \tilde{y}'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h_i^2)}{h_i} - \underbrace{f(x_i, \tilde{y}(x_i))}_{= \tilde{y}'(x_i)} = \mathcal{O}(h)$$

$\Rightarrow$  Konsistent von Ordnung 1

### Lemma 3.20 Diskretes Gronwall Lemma

Seien  $p_n, q_n, e_n$  positive Folgen mit

$$e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dann gilt

$$e_n \leq \left( e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right)$$

Beweis: vollst. Induktion

Anfang:  $e_1 \leq (1+q_0)e_0 + p_0 \leq \underbrace{\exp(q_0)}_{\geq 1+q_0 \geq 1} e_0 + \exp(q_0)p_0$

Schritt:  $e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n$

$$\leq \exp(q_n)e_n + \exp(q_n)p_n$$

$$= \exp(q_n) \left[ \left( e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right) + p_n \right]$$

$$\leq \exp(q_n) \left[ \left( e_0 + p_n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right) \right]$$

$$= \left( e_0 + \sum_{j=0}^n p_j \right) \exp\left( \sum_{j=0}^n q_j \right)$$

□

### Satz 3.21 Konvergenz von ESV (8)

Gegeben ESV mit Verfahrensformel  $f(x, y, h)$ .

Sei  $f$  global Lipschitzstetig bzgl.  $y$  mit Konstante  $L$ , dann gilt:

Ist das ESV konsistent (mit Ordnung  $p$ )

so ist es auf  $I$  konvergent ( $\rightarrow$  ).

Beweis Sei  $a \leq x < x+h \leq b$

$$\text{Es gilt } \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} = f(x, \tilde{y}(x), h) + \tau_h(x, \tilde{y})$$

$$\rightarrow \tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j = h_j f(x_j, \tilde{y}_j, h_j) + h_j \tau_j \quad \forall j=0, \dots, n-1$$

Lipschitz  $\Rightarrow$

$$|e_{j+1}| \leq |e_j| (1 + h_j L) + |\tau_j| h_j$$

Gronwall  
 $\Rightarrow$

$$\|e_n\| \leq \left[ |e_0| + (b-a) \underbrace{\max_j |\tau_j|}_{= O(h^p)} \right] \exp(b-a)$$

$$\leq O(h^p)$$

□



Beispiel 3.22 (Dahlquist'sche Testgleichung)

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

→ Folien

Was passiert da? Warum?

Unsere Konvergenzaussage gilt nur für  $h \rightarrow 0$ ,  
aber jetzt betrachten wir ein festes  $h \gg 0$ .

Lösung:  $\tilde{y}(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda < 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(ist monoton fallend!)

Wir erwarten; qualitativ ähnliches  
Verhalten, d.h.  $y_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$

Expl. Euler:  $f(x, y, h) = f(x, y)$

d.h.  $y_i = y_{i-1} + h \lambda y_{i-1}$

$$= \underbrace{(1 + h\lambda)^i}_{\begin{matrix} ? \\ \rightarrow 0 \end{matrix}} y_0$$

(2)

Notwendige Bed.  $|1 + \lambda h| < 1$

$$\Rightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$$

Bed im 2. Fall nicht erfüllt  $\rightarrow$  Instabilität

Für  $h \rightarrow 0$  immer erfüllbar, d.h. asympt. irrelevant, aber wichtig für die Praxis.

Def. 3.23 Nullstabilität

Sei  $y_i$  num. Lösung einer AWA

zu Startwert  $y_0$

$z_i$  ~~---~~ aber gestörten AWA

zu Startwert  $z_0 = y_0 + \varepsilon$ .

Das Verfahren heißt nullstabil, falls

$$|y_i - z_i| \leq C \delta \quad \forall i,$$

$C > 0$ ,  $\delta$  obere Schranke der Störung, d.h.  $\varepsilon < \delta$ .

Aber nur Aussage für  $h \rightarrow 0$ .

Expl. Euler ist nullstabil, aber für großer  $h$  "unbrauchbar".

## Def 3.24 A-stabil

Ein num. Verfahren heißt  
absolut stabil (A-stabil), wenn  
für 3.22 (Dolquit. Testg.)  
für alle  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0.$$

(Analog zu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\tilde{y}(x)\| = 0$ )

Offenbar wird expl. Euler instabil für  
großes  $h$ , oder großes  $\lambda$ , aber wann ist er  
stabil? Wir führe  $z = \lambda h$  ein &  
betrachten Entwicklung:

$$y_i = \underbrace{(1+z)^i}_{=: R(z)} y_0$$

(Stabilitätsfunkt)  $\left. \begin{array}{l} \text{für } |R(z)| < 1 \text{ A-stabil} \end{array} \right\}$

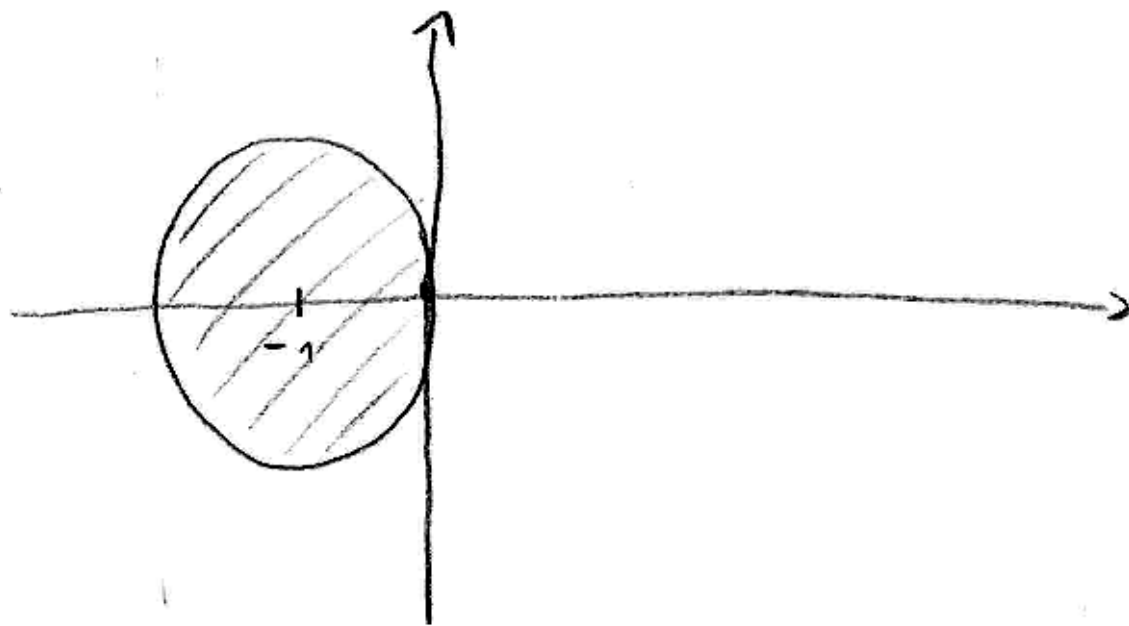
### Def 3.25 Stabilitätsgebiet

(4)

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| < 1\}$$

d.h. der Bereich der komplexen Ebene, für den die Diskretisierung der Dalg. Festglg mit  $h = \frac{z}{\lambda}$  stabil ist.

### Beispiel 3.26



Expl. Euler ist bedingt stabil

Idee: (expl. Euler)  $y_{i+1} = y_i + \lambda h y_{i+1}$

$$\Rightarrow (1 - \lambda h) y_{i+1} = y_i \Rightarrow y_{i+1} = (1 - \lambda h)^{-1} y_i = (1 - \lambda h)^{-i} y_0$$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{1}{1 - z}$$



Bisher nur bekannte Werte verwendet,  
aber geht das auch anders?

Def 3.27 (implizites ESV)

gegeben ein zul. Gitter  $I_h$  und

Verfahrensfunktion  $f$ .

Ein implizites ESV liefert  $y_h$  als

$$y_{j+1} = y_j + h_j f(x_{j+1}(y_j, y_{j+1}), h_j)$$

mit  $y_h(x_j) = y_j$  ↑ auch neue Werte

Anmerkung: Hier muss in jedem Schritt  
ein GLS gelöst werden!

# Beispiele 3.28

6

i) Implizites Eulerverfahren:

Newton-Cotes, rechte Stützstelle

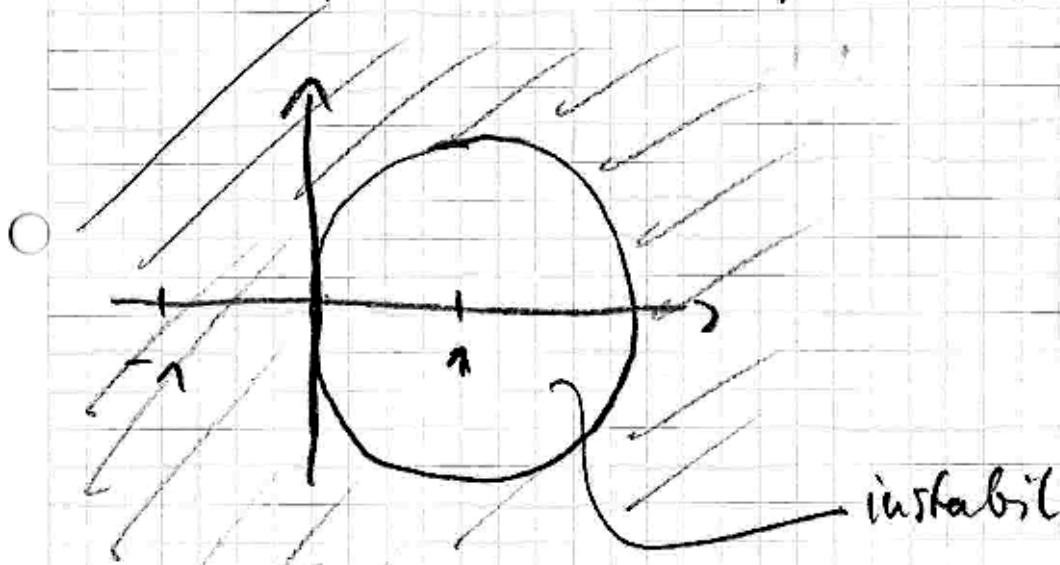
$$P(x, y, h) = f(x+h, y(x+h))$$

$$\text{d.h. } \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h_i f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$R(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\rightarrow |R(z)| < 1 \quad \text{falls } |1-z| > 1$$



uneingegrenzt. A-stabil & L-stabil



ii) Crank-Nicolson-Verfahren:  
wieder Trapezregel

$$\Rightarrow \varphi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x+h, y+h)]$$

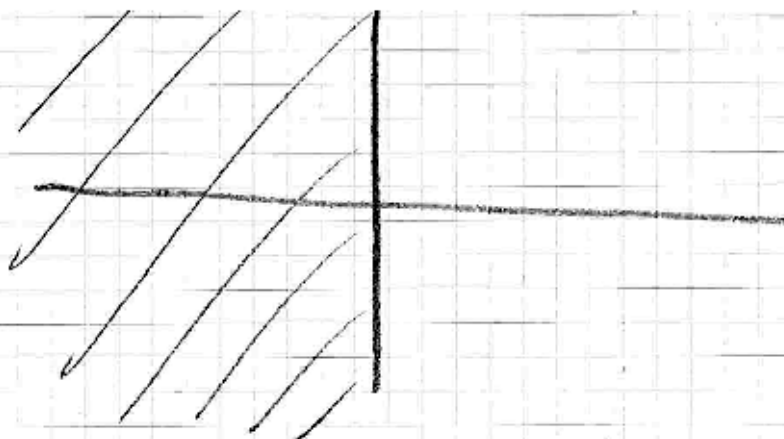
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Ordnung?

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{\tilde{y}(x_{i+1}) - \tilde{y}(x_i)}{h_i} - \varphi(x_i, \tilde{y}, h_i) \\ &= \frac{1}{h_i} \left[ \tilde{y}(x_i) + h_i \tilde{y}'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} \tilde{y}''(x_i) + O(h_i^3) - \tilde{y}(x_i) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\tilde{y}'(x_i)}_{= f(x_i, \tilde{y}(x_i))} + \underbrace{\tilde{y}'(x_{i+1})}_{= f(x_{i+1}, \tilde{y}(x_{i+1}))} \right] \end{aligned}$$

wieder Taylor...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_i} \left[ h_i \tilde{y}'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} \tilde{y}''(x_i) + O(h_i^3) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \tilde{y}'(x_i) + \tilde{y}'(x_i) + h_i \tilde{y}''(x_i) + O(h_i^2) \right] \\ &= O(h_i^2) \rightarrow \text{Konsistenzordnung 2} \end{aligned}$$



eingeschw. A-stabil, nicht L-stabil

### Def 3.29 L-Stabil

Ein Verfahren heißt L-Stabil, falls es A-stabil ist und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) = 0 \quad (\text{siehe Folien})$$

### Bsp 3.30

$\Theta$ -Verfahren

$$f(x, y, h) = \Theta f(x+h, y(x+h)) + (1-\Theta) f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i \left( \Theta f(x_{i+1}, y_{i+1}) + (1-\Theta) f(x_i, y_i) \right)$$

$\Theta = 0$  : expl Euler

$\Theta = 1$  : impl Euler

$\Theta = \frac{1}{2}$  : Crank-Nicolson

Wie können wir höhere Ordnung verf. konstruieren?

Idee: mehr Taylor-Glieder der Ableitung,  
d.h. mehr ~~h~~ von  $f(x, y)$

Def. 3.30 Taylorverfahren

Das TV der Ordnung  $p$  ist gegeben durch

$$\varphi_p(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) + \dots \\ + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x, y)$$

Satz 3.32 Sei  $f \in C^p(I)$

⑧

dann ist das Taylorverf. mit Vorfakt.  $\rho_p$   
konvergent mit Ordnung  $p$  [falls der  
Anfangsfehler  $|e_0| = O(h^p)$ ].

Beweis ( $\rightarrow$  Übung)

Bemerkung:

- i) wir können ESV mit beliebig  
hoher Konvergenzord. konstruieren
- ii) Taylor-Verf. werden praktisch nicht  
eingesetzt, da wir
  - $\rho_p$  in abh. von  $f$  konstruieren  
müssen
  - höhere Ableitungen von  $f$   
"schwer zugänglich" sind.

### 3.3 Runge-Kutta Verfahren

Achtung: Anmeldungen Qispos, Übungsgruppenleiter werden gesucht!

①

#### Definition 3.33 (explizite Runge-Kutta Verfahren)

Ein ESV  $\mathcal{T}$  mit Verfahrensfunktion  $\varphi$  heißt explizites

Runge-Kutta Verfahren, falls gilt:

$$u_0 = y_0,$$

$$u_{j+1} = u_j + h \cdot \varphi(x_j, u_j, h), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

$$\varphi(x, u, h) = \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i(x, u, h) \quad \text{mit } \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1,$$

$$k_1(x, u, h) = f(x, u)$$

$$k_2(x, u, h) = f(x + \alpha_2 h, u + \beta_{2,1} k_1(x, u, h))$$

⋮

$$k_m(x, u, h) = f(x + \alpha_m h, u + \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{m,l} k_l(x, u, h))$$

$$\text{mit } \alpha_j \in [0, 1]$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i, \gamma_i, \beta_{i,l}$  sind von  $x, u, h$  unabhängig und so gewählt, dass die Konsistenzordnung von  $\varphi$  maximal wird.

$m$  heißt Stufenzahl des Runge-Kutta Verfahrens und  $k_i$

heißt  $i$ -te Stufenfunktion.

#### Notation (Butcher-Tableau)

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m \end{array}$$

bzw

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma^T \end{array} \quad \text{mit } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^m, \beta \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Bemerkung:

(2)

•  $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1 \Leftrightarrow$  Konsistenz des entsprechenden Runge-Kutta-Verfahrens.

• Oft wird zusätzlich  $\sum_{i=1}^{k-1} \beta_{e,i} = \alpha_e \quad \forall e = 2, \dots, m$  gefordert, dann approximiert  $k_e(x_j, u_j, h_j)$  die Ableitung  $y'(x_j + \alpha_e h) = y'(x_j + \alpha_e h)$  bis auf Größenordnung  $\mathcal{O}(h^2)$  (falls  $f$  genügend glatt).

Beispiele 3.34

1) explizites Eulerverfahren: (1-stufig)

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$k_1(x, u, h) = f(x, u, h)$$

$$\varphi(x, u, h) = k_1(x, u, h) = f(x, u)$$

2) verbessertes Eulerverfahren: (2-stufig)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$k_1(x, u, h) = f(x, u)$$

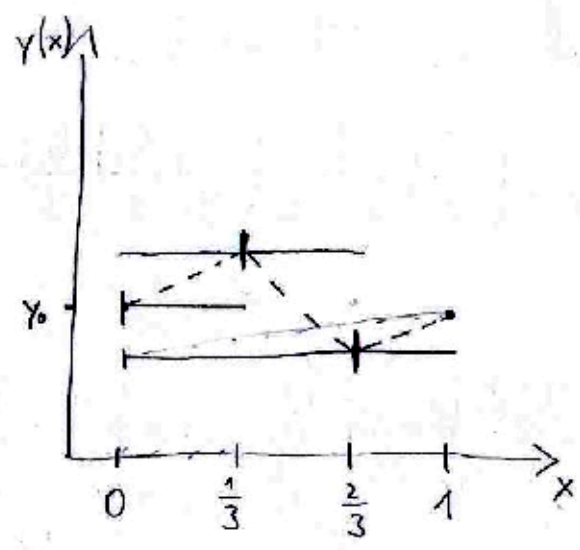
$$k_2(x, u, h) = f\left(x + \frac{1}{2}h, u + \frac{1}{2}h k_1(x, u, h)\right)$$

$$\varphi(x, u, h) = h k_2(x, u, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} f(x, u)\right)$$



### 3) Verfahren von Heun

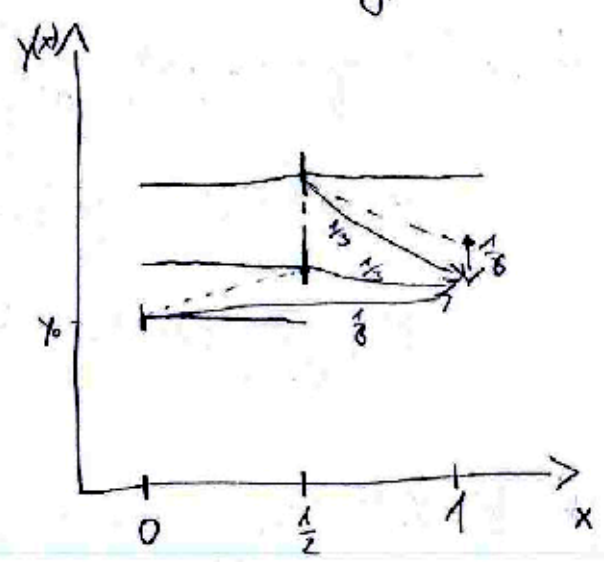
0			
1/3	1/3		
2/3		2/3	
	1/4	0	3/4



### 4) Klassisches Runge-Kutta Verfahren (4-stufig)

0				
Rechteckregel	1/2	1/2		
	1/2		1/2	
Mittelpunktregel	1		1	
		1/6	1/3	1/3
				1/6

Simpsonregel



#### Bemerkungen:

- Zur Konstruktion von R.-K. Verfahren genügt es autonome Differentialgleichungen ( $f(x,y) = f(y)$ ) zu betrachten.
- Runge-Kutta Verfahren lassen sich auch auf Systemen von Differentialgleichungen anwenden.
- Jede skalare Differentialgleichung 1. Ordnung lässt sich als autonomes System schreiben:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0 \iff \begin{cases} y_1'(x) = f(y_2, y_1), & y_1(a) = y_0 \\ y_2'(x) = 1, & y_2(a) = a \end{cases}$$

2) Die Stufenzahl  $m$  und die Konsistenzordnung  $p = p(m)$  sind  $\textcircled{4}$  im allg. nicht korreliert:

$m$	1	2	3	4	5	6	...	10	11	...	17
$p(m)$	1	2	3	4	4	5		7	8		10

Beispiel 3.35 Konstruktion eines 2-stufigen R-K. Verfahrens

•  $\tau_h(x, y) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \varphi(x, y(x), h)$

•  $m=2, \quad f(x, y) = f(y):$

•  $\varphi(x, y, h) = \gamma_1 k_1(x, y, h) + \gamma_2 k_2(x, y, h)$   
 $= \gamma_1 f(y) + \gamma_2 f(y + h\beta_{2,1} f(y))$

$\stackrel{\text{Taylor}}{=} (\gamma_1 + \gamma_2) f(y) + h\beta_{2,1}\gamma_2 f(y) f'(y) + \frac{h^2}{2} \gamma_2 \beta_{2,1}^2 f(y)^2 f''(y) + \mathcal{O}(h^3)$

•  $\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \stackrel{\text{Taylor}}{=} f(y) + \frac{h}{2} f(y) f'(y) + \frac{h^2}{6} (f''(y) f^2(y) + f'(y)^2 f(y)) + \mathcal{O}(h^3)$

$\Rightarrow \tau_h(x, y) = (1 - (\gamma_1 + \gamma_2)) f(y) + h(\frac{1}{2} - \beta_{2,1}\gamma_2) f(y) f'(y)$   
 $+ \frac{h^2}{2} (\frac{1}{3} (f''(y) f^2(y) + f'(y)^2 f(y)) - \gamma_2 \beta_{2,1}^2 f(y)^2 f''(y)) + \mathcal{O}(h^3)$

- $\Rightarrow$  Bedingungen für Konsistenz:
- 1. Ordnung:  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$
  - 2. Ordnung:  $\beta_{2,1}\gamma_2 = \frac{1}{2}$
  - 3. Ordnung: nicht möglich

$\Rightarrow$  Für  $\gamma_2 \in [0, 1]$ ,  $\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \beta_{2,1} = \frac{1}{2\gamma_2}$  ist das Verfahren konsistent 2.Or.

Verfahren höherer Stufen können analog konstruiert werden, wobei für den Aufwand gilt ⑤

Ordnung $p$	1	2	3	4	5	...	10
# Bedingungen	1	2	4	8	16		1205

Bemerkung: Hat ein R.-K. Verfahren die Konsistenzordnung  $p$ , so gilt für lin. glattes  $f$ :

$$\tau_n(x, y) = h^p \bar{\tau}(x, y) + O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0$$

wobei  $\bar{\tau}(x, y) = \sum_k \varepsilon_k D_k f(x, y)$  mit  $D_k f \hat{=}$  Summe von Produkten von Ableitungen von  $f$   
 $\varepsilon_k \hat{=}$  Fehlerkoeffizienten.

### Satz 3.36

Explizite R.-K. Verfahren mit Konsistenzordnung  $p$  sind konvergent mit Ordnung  $p$ .

Beweis: Mit Satz 3.21 genügt es zu zeigen, dass die

$k_l(x, u, h)$  für  $l=1, \dots, m$  Lipschitz stetig sind.

Induktion: I.A.  $k_1(x, u, h) = f(x, u) \Rightarrow L_1 = L$

I.S.  $l \rightarrow l+1$ : Seien  $k_1, \dots, k_l$  Lipschitz stetig mit  $L$ -Konstanten  $L_1, \dots, L_l$ . Dann folgt:

$$|k_{l+1}(x, u_1, h) - k_{l+1}(x, u_2, h)| = \left| f\left(x + \alpha_{l+1} h, u_1 + \sum_{j=1}^l k_j(x, u_1, h) \beta_{2l+1, j}\right) - f\left(x + \alpha_{l+1} h, u_2 + \sum_{j=1}^l k_j(x, u_2, h) \beta_{2l+1, j}\right) \right|$$

$$\leq L \left| u_1 + \sum_{j=1}^l k_j(x, u_1, h) \beta_{2l+1, j} - u_2 - \sum_{j=1}^l k_j(x, u_2, h) \beta_{2l+1, j} \right|$$



$$IV. \leq L |u_1 - u_2| + Lh \sum_{j=1}^l |\beta_{2m,j}| L_j |u_1 - u_2|$$

$$\leq \underbrace{L \left( 1 + (b-a) \sum_{j=1}^l |\beta_{2m,j}| L_j \right)}_{=: L_{2m}} |u_1 - u_2|$$

$$=: L_{2m}$$

Definition 3.37 (Implizite Runge-Kutta Verfahren)

Ein ESV mit Verfahrensfunktion

$$\varphi(x, u, h) = \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i(x, u, h) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$$

$$k_j(x, u, h) = f \left( x + \alpha_j h, u + h \sum_{l=1}^m \beta_{j,l} k_l(x, u, h) \right), \quad j=1, \dots, m$$

heißt implizites Runge-Kutta Verfahren mit  $m$  Stufen.

Sind  $\alpha_j, \beta_{j,l}, \gamma_j$  so gewählt, dass  $\varphi$  maximale Konsistenzordnung hat so heißt das Verfahren optimales Runge-Kutta Verfahren.

Bemerkungen:

1) Das implizite R.-K. Verfahren mit  $m$  Stufen ist wohldef., falls für die Schrittweite  $h$  gilt

$$hL \max_{j=1, \dots, m} \sum_{l=1}^m |\beta_{j,l}| < 1$$

2) Sei  $f(x,y) = f(x)$ . Dann stimmt das optimale implizite R.+K. Verfahren mit  $m$  Stufen überein mit zusammengesetzten Gaußschen Quadraturen auf  $I$  mit jeweils  $m$  Knoten in den Teilintervallen  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j=0, \dots, n-1$

c) Optimale  $m$ -stufige implizite R-K Verfahren haben Konsistenz- und Konvergenzordnung  $2m$ ,  $m \geq 1$ .  
(Deuffhard / Bormann § 6.2 und § 6.3)

d) Vorteile von impliziten R-K Verfahren:

- höhere Konsistenz- und Konvergenzordnung
- Qualitative Eigenschaften der Lösung werden auch schon bei größeren Schritten wiedergegeben. (Stabilität)

Nachteile:

- In jedem Schritt muss ein System von  $m$  gekoppelten nicht-linearen Gleichungen gelöst werden.

Kompromiss: Diagonal implizite Runge-Kutta Verfahren (DIRK-Verfahren). (Keine Kopplungen)

### Beispiele 3.38

1)  $m=1$ ,  $p=2$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

2)  $m=2$ ,  $p=4$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- Ankündigungen:
- Es werden Übungsgruppenleiter gesucht!
  - Wie viele schreiben die Klausur (bzw. mündl. Prüfung) mit?

### Wiederholung (Runge-Kutta Verfahren)

$$y_0 = y_0$$

$$y_{j+1} = y_j + h \varphi(x_j, y_j, h)$$

$$\varphi(x, y, h) = \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i(x, y, h)$$

$$\gamma_i \in [0, 1] \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$$

$$k_i(x, y, h) = f(x + \alpha_i h, y + h \sum_{l=1}^m \beta_{i,l} k_l(x, y, h))$$

$$\alpha_i \in [0, 1] \\ \left( \sum_{l=1}^m \beta_{i,l} = \alpha_i \right)$$

### • Butcher-Tableau

$\alpha_1$	$\beta_{11}$	$\dots$	$\beta_{1m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\alpha_m$	$\beta_{m1}$	$\dots$	$\beta_{mm}$
	$\gamma_1$	$\dots$	$\gamma_m$

bzw.

$\alpha$	$\beta$
	$\gamma$

- Konstruktion von expliziten R-K Verfahren mit Hilfe der Taylorentwicklung.
- Konsistente R-K. Verfahren der Ordnung  $p$  sind konvergent mit Ordnung  $p$ .
- Für explizite R.-K. Verfahren gilt  $\beta_{i,l} = 0 \quad \forall l \geq i$
- Für DIRK Verfahren gilt  $\beta_{i,l} = 0 \quad \forall l > i$
- ↳  $m$  nicht-gekoppelte Gleichungen.
- $m$ -stufige optimale implizite R.-K. Verfahren haben Konsistenz- und Konvergenzordnung  $2m$ .
- ↳  $\alpha, \gamma$  entsprechen den Stützstellen und Gewichten von Gaussquadraturen.



### Beispiele 3.38 (optimale implizite Runge-Kutta Verfahren)

(2)

1)  $m=1, p=2$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

2)  $m=2, p=4$

$$\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{12}} & \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

### Satz 3.39 (Stabilitätsfunktion und Stabilitätsbereich von R.K. Verfahren)

Für die durch R.K. Verfahren gelieferte Näherungen für die Lösung des Dahlquist-Problems gilt

$$y_{k+1} = R(\lambda h) y_k.$$

Für explizite Verfahren ist  $R$  ein Polynom, für implizite Verfahren eine rationale Funktion.

Insb. sind expl. R.-K. Verfahren nur bedingt A-stabil.

Beweis: Übungen

### Satz 3.40 (Taylorentwicklung der Stabilitätsfunktion)

(3)

Sei  $R(x)$  die Stabilitätsfunktion eines R.-K. Verfahrens der Ordnung  $q$ .  
Dann gilt für  $h \in \mathbb{C}$

$$|R(h) - e^h| = \mathcal{O}(|h|^{q+1}), \quad h \rightarrow 0$$

D.h. die Taylorentwicklungen von  $R$  und  $e^h$  an der Stelle  $h=0$  stimmen bis zum  $q$ . Glied überein.

Beweis: Wir wenden das Verfahren auf die Differentialgleichung

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad \text{an.}$$

Da das Verfahren Konsistenzordnung  $p$  hat gilt für  $h > 0$

$$\mathcal{O}(h^p) = |\tau_h(0, 1)| = \left| \frac{y(h) - y(0)}{h} - \varphi(0, 1, h) \right|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{O}(h^{p+1}) &= |y(h) - (y(0) + h\varphi(0, 1, h))| \\ &= |e^h - R(h) \cdot 1| \end{aligned}$$

$R$  ist rationale Funktion, versch. bei 0 Polangr.  $\Rightarrow$  Bed. für alle  $h \in \mathbb{C}$  ▣

### Korollar 3.41

Die 0 liegt immer auf dem Rand des Stabilitätsgebietes.

Beweis: Nach Satz 3.40 gilt

$$R(h) - 1 = h + \mathcal{O}(h^2).$$

Also gilt  $R(0) = 1$  und  $R(h) - 1$  wechselt bei  $h=0$  das Vorzeichen. ▣

### 3.4 Extrapolation und Schrittweitensteuerung

(4)

Satz 3.42 (Hauptterm der asymptotischen Fehlerentwicklung bei ESV)

Es sei  $\varphi$  die Verfahrensfunktion eines ESV der Ordnung  $p$  auf einem äquidistanten Gitter  $I_h$  und es gelte:

$$\tau_h(x, y) = \bar{\tau}(x)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}), \quad e_0 = \rho_0 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Weiter seien  $\varphi, f \in C^2$  und  $\bar{y}$  sei die eind. bestimmte Lösung der linearen Störgleichung

$$(SG) \begin{cases} \bar{y}'(x) = \rho(x)\bar{y}(x) - \bar{\tau}(x) \\ \bar{y}(a) = \rho_0 \end{cases}$$

mit  $\rho(x) = f_y(x, \tilde{y}(x)) \quad \forall x \in I$ . (SG) hängt nur von der Differentialgleichung ab)

Dann gilt für  $x_j \in I_h$ :

$$y_j = \tilde{y}(x_j) + \bar{y}(x_j)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0$$

Beweis:

$$\tau(x, \tilde{y}) = \frac{\tilde{y}(x_{j+1}) - \tilde{y}(x_j)}{h} - \varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y}(x_{j+1}) - \tilde{y}(x_j) = h\tau(x, \tilde{y}) + h\varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h)$$

$$e_{j+1} := \tilde{y}(x_j) - y_j$$

$$e_{j+1} - e_j = -y_{j+1} + y_j + h\tau(x, \tilde{y}) + h\varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h)$$

$$= y_j - h\varphi(x_j, y_j, h) + y_j + \bar{\tau}(x_j)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) + h\varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h)$$

$$\Rightarrow e_{j+1} = e_j + h(\varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h) - \varphi(x_j, y_j, h)) + \bar{\tau}_j h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

Taylorentwicklung:

$$\varphi(x_j, y_j, h) = \varphi(x_j, \tilde{y}(x_j) + e_j, h) = \varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h) + e_j \varphi_y(x_j, \tilde{y}(x_j), h) + \frac{1}{2} e_j^2 \varphi_{yy}(x_j, \tilde{y}(x_j), h)$$

für ein  $\eta \in [\tilde{y}(x_j), y_j]$

Aus der Konsistenz folgt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_j, \tilde{y}, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} = \tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$$

$$\Rightarrow \varphi_y(x_j, \tilde{y}, 0) = f_y(x_j, \tilde{y}(x_j))$$

$$\Rightarrow \varphi_y(x_j, \tilde{y}, h) = \varphi_y(x_j, \tilde{y}, 0) + \mathcal{O}(h) = f_y(x_j, \tilde{y}(x_j)) + \mathcal{O}(h) = p(x_j) + \mathcal{O}(h)$$

Einsetzen liefert:

$$\Rightarrow \varphi(x_j, y_j, h) - \varphi(x_j, \tilde{y}(x_j), h) = e_j p(x_j) + \mathcal{O}(e_j h) + \mathcal{O}(e_j^2)$$

$$\Rightarrow e_{j+1} = e_j + h e_j p(x_j) + \tau_j h^{p+1} + \mathcal{O}(e_j h^2) + \mathcal{O}(e_j^2 h) + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$\left( \bar{e}_{j+1} = \bar{e}_j + h (\bar{e}_j p(x_j) + \tau_j) \right) + \mathcal{O}(\bar{e}_j h^2) + \mathcal{O}(\bar{e}_j^2 h^{p+1}) + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

wobei  $\bar{e}_j = h^{-p} e_j$   $\rightarrow$  explizites Euler Verfahren für (SG)

aus Konsistenz des Euler Verfahrens folgt

$$\bar{e}_j = \bar{y}(x_j) + \mathcal{O}(h)$$

$$e_j = \bar{y}(x_j) h^p + \mathcal{O}(h^p)$$



Korollar 3.43 (Extrapolation)

Seien  $I_h, I_{h'}$  zwei äquidistante Gitter auf  $I$  mit  $h' = \varphi h$ ,  $0 < \varphi < 1$  (Üblicherweise  $\varphi = \frac{1}{2}$ ). Sei weiter

$x \in I_h \cap I_{h'}$  und es gelten die Voraussetzungen von Satz

Seien  $u_h, u_{h'}$  die Näherungslösungen des gleichen Verfahrens auf  $I_h$  bzw.  $I_{h'}$ . Dann gilt für

$$u_h^* = \alpha u_h(x) + \beta u_{h'}(x) \text{ mit}$$

$$\alpha = -\frac{\varphi^p}{1-\varphi^p} \text{ und } \beta = 1 - \alpha:$$

$$u_h^*(x) = \tilde{y}(x) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Beweis:

Mit Satz 3.42 gilt

$$u_h(x) = \tilde{y}(x) + \bar{y}(x)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\text{und } u_{h'}(x) = \tilde{y}(x) + \bar{y}(x)(\varphi h)^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Einsetzen liefert

$$u_h^*(x) = -\frac{\varphi^p}{1-\varphi^p} \alpha u_h(x) + \left(1 + \frac{\varphi^p}{1-\varphi^p}\right) \beta u_{h'}(x)$$

$$= (\alpha + \beta) \tilde{y}(x) + (\alpha h^p + \beta \varphi^p) h^p \bar{y}(x) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \tilde{y}(x) + \left(\frac{-\varphi^p}{1-\varphi^p} + \left(1 + \frac{\varphi^p}{1-\varphi^p}\right) \varphi^p\right) h^p \bar{y}(x) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \tilde{y}(x) + \left(\frac{-\varphi^p}{1-\varphi^p} + \frac{\varphi^p - \varphi^{2p} + \varphi^{2p}}{1-\varphi^p}\right) h^p \bar{y}(x) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \tilde{y}(x) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$



## 2.d. Schrittweitesteuerung

Am Beweis von Satz 3.21:

$$\|e_h\|_h \leq (b-a) \tau \exp(L(b-a)) + |e_0| e^{L(b-a)}$$

wobei  $\tau$  obere Schranke für den Abschneidefehler.

Ziel:  $\|e_h\|_h \leq \varepsilon$

dazu:  $\tau \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{(b-a) e^{L(b-a)}} := \eta$       $e_0 \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{e^{L(b-a)}}$

Idee: Wähle  $h_j$  so, dass  $\tau_j \leq \eta$ .

Dazu sei  $\hat{y}$  die eind. Lösung des AWP

$$\hat{y}'(x) = f(x, \hat{y})$$
$$\hat{y}(x_j) = y_j$$

und es gelte

$$\tau_h(x_j, \hat{y}) = \hat{y}(x_{j+1}) - \bar{y}_0(x_{j+1}) h^p - \bar{y}'_1(x_{j+1}) h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Dann folgt

$$\tau_h(x_j, \hat{y}) = \frac{\hat{y}(x_{j+1}) - \hat{y}(x_j)}{h} - \varphi(x_j, y_j, h)$$

$$= \bar{y}_0(x_j + h) h^{p-1} + \bar{y}'_1(x_j + h) h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \bar{y}_0'(x_j) h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ansatz:

$$h^p |\bar{y}_0'(x_j)| \leq \eta \quad (A)$$



# 1. Variante mittels Extrapolation

1) Bestimme Näherungslösung  $v_1$  in  $x^*$ th ausgehend von  $(x_j, y_j)$  bei Schrittweite  $\tilde{h}$

2) Bestimme Näherungslösung  $v_2$  in  $x^*$ th ausgehend von  $(x_j, y_j)$  bei Schrittweite  $\frac{\tilde{h}}{2}$

Mit Satz 3.42 folgt

$$\hat{y}(x_{j+1}) - v_1 = -\tilde{y}'_0(x_j) \tilde{h}^{p+1} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

$$\hat{y}(x_{j+1}) - v_2 = -\tilde{y}'_0(x_j) \left(\frac{\tilde{h}}{2}\right)^{p+1} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

$$\Rightarrow \tilde{h}^{p+1} \tilde{y}'_0(x_j) = \frac{v_1 - v_2}{1 - 2^{-(p+1)}} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'_0(x_j) = \tilde{h}^{-(p+1)} \frac{v_1 - v_2}{1 - 2^{-(p+1)}} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'_0(x_j) = \tilde{h}^{-(p+1)} \frac{v_1 - v_2}{1 - 2^{-(p+1)}} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

Einsetzen in (A) liefert Schätzung

$$h = \tilde{h}^p \sqrt{\frac{2^{p+1} - 1}{2^{p+1}} \frac{\eta \tilde{h}}{|v_1 - v_2|}}$$



## Schrittweitensteuerung

### 2. Variante

Letztes Mal: Approximation der exakten Lösung durch Halbieren des Zeitschritts.

Alternative: Erhöhen der Konsistenzordnung.

Wir setzen wieder

$$h^p |\bar{y}'(x^*)| = \eta$$

so dass  $\|e_h\|_h \leq \tilde{\varepsilon}$

Seien  $\bar{\Phi}, \tilde{\Phi}$  RK-Verf. mit Konsistenzordnung

$p, q$  (wobei  $q > p$ )

und erfüllen Voraussetzungen aus 3.42.

Berechne  $v_1 = z^* + h \bar{\Phi}(x^*, z^*, h)$

$$v_2 = z^* + h \tilde{\Phi}(x^*, z^*, h)$$

②

Konsistenzfehler

$$\tau_2 = \tau_1 (1 + \mathcal{O}(h^{q-p}))$$

d.h. Abschätzung des Konsistenzfehlers aus beiden Fehlern

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_1 (1 + \mathcal{O}(h^{q-p})) \approx \tau_1$$

Mit 3.42 berechnen wir

$$\tau_1 = \hat{y}(x^* + \tilde{h}) - v_1 = -\bar{y}'_0(x^*) \tilde{h}^{p+1} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{p+2})$$

$$\tau_2 = \hat{y}(x^* + \tilde{h}) - v_2 = -\bar{y}'_0(x^*) \tilde{h}^{q+1} + \mathcal{O}(\tilde{h}^{q+2})$$

$$\Rightarrow \bar{y}'_0(x^*) = \tilde{h}^{-(p+1)} \frac{v_1 - v_2}{1 - \tilde{h}^{q-p}} + \mathcal{O}(\tilde{h})$$

$$\Rightarrow h = \tilde{h}^p \sqrt{\frac{\tilde{h}^p (1 - \tilde{h}^{q-p})}{|v_1 - v_2|}}$$

Um den Aufwand gering zu halten, verwenden wir 2 RKV, die sich nur im Vektor  $f$  unterscheiden



### Def 3.44 Eingebettetes RKV

Zur Absch. des Konstruktionsfehlers wählen wir zu einem RKV mit  $\alpha, \beta, \gamma$  und Ordnung  $p$  ein zweites mit  $\alpha, \beta, \hat{\gamma}$  und  $q > p$ .

0	0		
$\alpha_2$	$\beta_{2,1}$		
$\vdots$	$\vdots$		
$\alpha_m$	$\beta_{m,1}$	$\beta_{m,m-1}$	0
<hr/>			
	$\gamma_1$	$\gamma_{m-1}$	$\gamma_m$
	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_{m-1}$	$\hat{\gamma}_m$

### Beispiel 3.45

a) Euler-Herz-Verfahren

0	0	0
1	1	0
$\gamma$	1	0
$\hat{\gamma}$	$1/2$	$1/2$

Ordnung 1,2

b) 2. / 3. Ordnung

0	0	0	0
2/3	2/3	0	0
2/3	0	2/3	0
$\mu$	1/4	3/4	0
$\sigma$	1/4	3/8	3/8

- c) RK - Fehlberg - 4(5)  
4. / 5. Ordnung  
wird echt verwendet
- d) Dormand-Prince  
4. / 5. Ordnung

} Tabellen des Skript

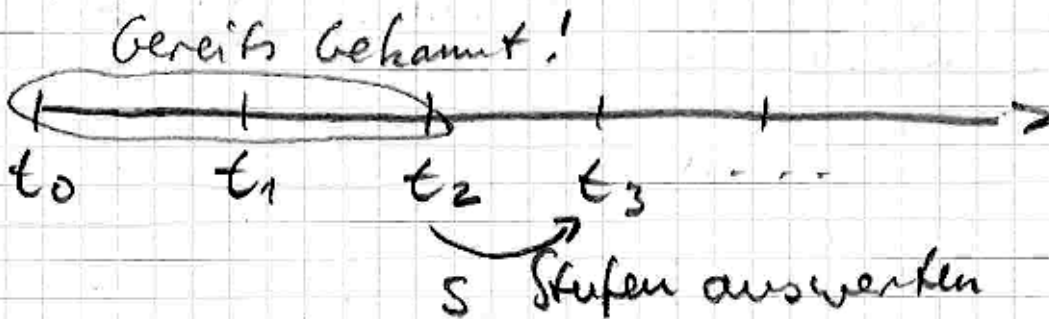


### 3.5 Mehrschrittverfahren

5

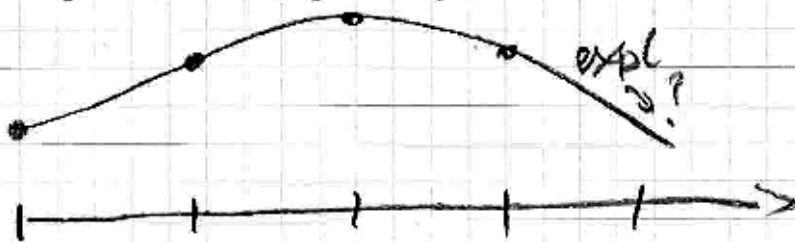
Runge-Kutta-Verfahren erlauben Konstruktion von Vrf. höher Ordnung, aber!

- viele Auswertungen von  $f(\cdot)$
- wir kennen aber bereits  $f$  & Lösung  $y$  zu vielen Zeitpunkten



Idee: Polynom-IP erlaubte approx. Integration

→ Stützstellen an alten Zeitpunkten !!



Extrapolation (→ explizit)



oder



letzte Stützstelle unbekannt ( $\rightarrow$  Triplicität)

Def 3.46 (lineare) Mehrschrittverfahren

Sei  $I_h$  ein äquidist. Gitter mit Schrittweite  $h$

i) Ein Verfahren  $\mathbb{I}$  zur Los des AWP auf  $I$

heißt  $k$ -Schrittverfahren,  $k \in \mathbb{N}$ ,

falls es eine Verfahrensform

$$\varphi = \varphi(x, v_0, v_1, \dots, v_k, h)$$

mit  $(x + ih, v_i)$  Paaren, so dass die Folge

$y_h(x_j) =: y_j$  gegeben ist durch

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{j+i} = h \varphi(x_j, y_j, \dots, y_{j+k}, h)$$

Verallgem. von ESV

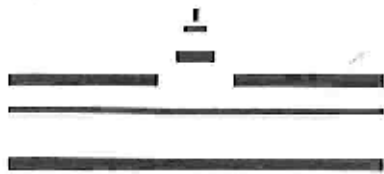
mit Anf.w.  
 $y_0, \dots, y_{k-1}$

ii)  $\mathbb{I}$  heißt lineares  $k$ -Schrittverfahren, falls

$$\varphi(x, v_0, \dots, v_k, h) = \sum_{i=0}^k b_i \varphi(x + ih, v_i)$$

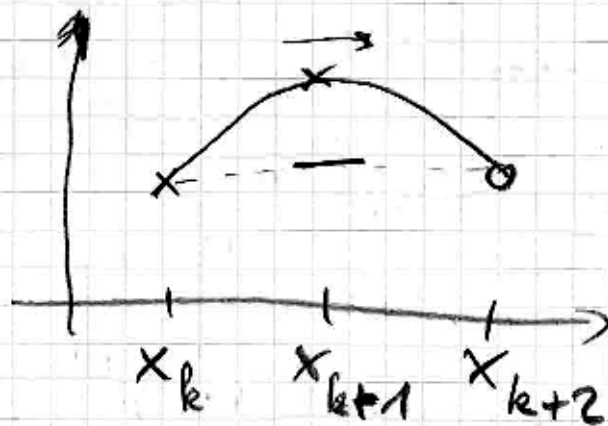
Das Verfahren heißt explizit, falls

$$b_k = 0, \text{ sonst implizit.}$$



### Beispiel 3.47 Mittelpunktsregel

$$y_{k+2} - y_k = 2h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$



Gleiche Idee wie bei dem Einschrittverfahren,  
aber anderer Algorithmus

Def 3.48 Abschneidefehler & Konsistenz

Sei  $y$  Lsg. der AWV.

i) Gegeben eine Verf. fkt  $f$ , ... heißt

$$\tau_h(x, y) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i y(x+hi) - f(x, y(x), y(x+h), \dots, h)$$

lokaler Abschneidefehler.

ii) Für lineare MSV gilt

$$\tau_h(x, y) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i y(x+hi) - \sum_{i=0}^k b_i f(x+hi, y(x+hi))$$

- (ii) Ist  $\tau_h(x, \tilde{y}) = o(1)$  für  $h \rightarrow 0$  (P)  
 heißt  $\tilde{\Phi}$  konsistent (falls die Anfangs-  
 werte konsistent sind, d.h.  $y_i \rightarrow \tilde{y}(x_i)$   
 für  $h \rightarrow 0 \ \forall i = 0, \dots, k-1$ )  
 Ist  $\tau_h(x, \tilde{y}) = O(h^p)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  für  $h \rightarrow 0$ , so  
 hat  $\tilde{\Phi}$  Konsistenzord.  $p$  (falls die  
 AW Konsistenzordnung  $p$  haben).

Beispiel 3.49 Konsistenzordnung der Mittelpunktsregel ○

Sei  $f \in C^2$ , dann hat die Mittelpunktsregel  
 Konsistenzordnung 2.

Beweis Taylor von  $y(x)$  und  $y(x+2h)$   
 um  $y(x+h)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_h(x, y) &= \frac{1}{h} (y(x+2h) - y(x)) \\ &\quad - 2f(x+h, y(x+h)) \\ &= 2y'(x+h) + \frac{1}{h} O(h^3) - 2y'(x+h) \\ &\quad (\text{gerade } h\text{-Potenzen fallen weg}) \\ &= O(h^2) \end{aligned} \quad \square$$

### 3.5-1 Theorie linearer Differenzgleichungen

Ziel wird sein Interpolationen zu nutzen um MSV zu konstruieren. Auf äquidist. Gitter vereinf. sich die Diff stark. Bsp wir nun weiter machen, wollen wir erst einige theo. Grundlagen diskutieren.

#### Def 3.50 Differenzgleichung

Sei  $U := \{\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}\}$  die Menge der komplexen Zahlenfolgen  $u_i = u(i)$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in U$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  gegeben. Dann heißt:

$$u_{n+k} + \alpha_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 u_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Differenzgleichung der Ordnung  $k$   
( $DG_k$ ).

Diese heißt homogen, falls  $f = 0$ ,  
sonst inhomogen.

## Lemma 3.51

(10)

Sei eine homogene DG mit Ord  $k$  gegeben.

i) Für gegebene Anfangswerte  $u_0, \dots, u_{k-1}$   
∃ genau eine Folge  $u \in \mathcal{U}$ , welche  
der DG genügt.

ii) Die Menge aller Lösungen der DG  
bildet einen  $k$ -dim Unterraum von  $\mathcal{U}$ .  
Basislösungen sind gegeben durch

$$\left[ \begin{array}{l} u^{(j)} = (u_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}_0} = (u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \dots) \\ u_n^{(j)} = \delta_{nj}, \quad 0 \leq n, j \leq k-1 \\ u^{(j)} \text{ erfüllt DG für } 0 \leq j \leq k-1 \end{array} \right.$$

### Def 3.51. Charakteristisches Polynom

i) Für homogene DG<sub>k</sub>

$$u_{n+k} + \alpha_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 u_n = f_n \quad \text{①}$$

heißt

$$S(t) = t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \dots + \alpha_0$$

charakteristisches Polynom

ii) Für (lineare) Mehrschrittverfahren

ist

$$S(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$$

das 1. charakteristische Polynom,

iii)  $\sigma(t) = \sum_{i=0}^k b_i t^i$

das 2. char. Polynom.

[Wir haben gezeigt, dass LMVs auf DGs führen]



# Satz 3.52

(2)

Sei  $S(t)$  char. Polynom einer homogenen

$$DG_k \left[ \sum_{i=0}^k \alpha_i u_{n+i} = 0, \alpha_k = 1 \right], \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ die Nullst.}$$

des Polynoms mit Vielfachheit  $m_1, \dots, m_m$

mit  $\sum_{i=1}^m m_i = k$ .

Dann gilt:

$u$  löst die  $DG_k$

$$\Leftrightarrow u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, u_n = \sum_{j=1}^m p_j(n) \lambda_j^n$$

$$p_j \in P_{m_j-1}$$

## Beweis

Idee: Sei  $u_n = \lambda_j^n \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^k \alpha_i u_{n+i}}_{DG} = \lambda_j^n \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda_j^i = 0$   
Lösung?

d.h.  $u_n$  ist Lösung!

Wir setzen  $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^k$  "Folgenabschnitt"

und es gilt

$$\vec{u}_{n+1} = A \vec{u}_n, \text{ bzw. } \vec{u}_n = A^n \vec{u}_0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{"Begleitmatrix} \\ \text{zu } S \\ \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \end{array}$$

Weiter sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  EW  $A$  ( $\rightarrow$  siehe Lin Alg).  
 (Nach Lin Alg)  $\exists$  eine reguläre Matrix  $S$ ,  
 so dass  $A = S J S^{-1}$ , wobei  $J$  Jordan-  
 Normalform von  $A$  ist.

Da zu jedem  $\lambda_i$  nur ein EV existiert  
 ( $\rightarrow$  ü A), hat  $J$  die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad J_i = \lambda_i I + N_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

mit  $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ , d.h.  $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

Es gilt  $A^n = S J^n S^{-1}$ , d.h.  $\vec{u}_n = S J^n S^{-1} \vec{u}_0$ ,

mit  $J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$ ,

$$J_i^n = (\lambda_i I + N_i)^n = \sum_{j=0}^{m_i-1} \binom{n}{j} N_i^j \lambda_i^{n-j}$$

$\binom{n}{j}$  ist Polyn. von Grad  $j$  in  $n$

4

$\Rightarrow J_i^n$  enthält nur Koeff von Typ  $p_i(n) \lambda_i^n$   
mit  $\text{Grad}(p_i) \leq m_i - 1$ , d.h.  $p_i \in P_{m_i-1}$

$\Rightarrow u_n$  hat die angegebene Form

"Rückwärts": Übungsaufgabe.

Dass alle Folgen der Form  $u_n = \sum_{i=1}^m p_i(n) \lambda_i^n$

Lösungen der  $DG_k$  sind folgt durch

Dimensionsvergleich.

Dimension des Vektorraums der Lösungen  
der  $DG_k$  ist  $k$  (Satz 3.51).

Dimension des Vektorraums der Folgen  
dieser Form ist  $m_1 + \dots + m_m = k$ .

□ ○



5

### Satz 3.53 Wurzeltest von Dahlquist

Sei  $P$  charakt. Polynom einer  
homogenen  $DG_n$ , dann gilt:

○ (1) Jede Lösung der  $DG_n$  ist beschränkt

$\Leftrightarrow$  (2)  $\forall \lambda_i$  Nullst. von  $P$  gilt

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad \text{oder} \quad |\lambda_i| = 1 \text{ und } m_i = 1$$

(einfache Nullst.)

Beweis:

(1)  $\Rightarrow$  (2):

○ 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \stackrel{(3.52)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |p_i(u)| |\lambda_i|^n \leq C$$

polynomial      exponentiell

(2)  $\Rightarrow$  (1):

Sei  $u_n = \lambda_i^n$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \leq C$   
(Beschränktheit)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_i^n| \leq C \Rightarrow |\lambda_i| \leq 1$$

Weiter sei  $\lambda_i$  Nullst. mit  $m_i \geq 2$

(3.52)  $\Rightarrow u_n = n \lambda_i^n$  ist Lösung. Damit gilt

www.cells-in-motion.de  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \leq C \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |n \lambda_i^n| \leq C \Rightarrow |\lambda_i| < 1$

⑥

Anmerkung: Wir werden 3.53 später

benötigen um Stabilität zu zeigen.

Aus Beschränktheit der  $DG_k$  folgt

Beschränktheit der Fehler

Wir haben Lösungen der homogenen  $DG$  diskutiert, aber was ist bei inhomogener RHS?

Def 3.54 Verschiebeoperator

$E: U \rightarrow U, u \rightarrow Eu$  mit  $(Eu)_n = u_{n+1}$

d.h.  $(u_0, u_1, u_2, \dots) \rightarrow (u_1, u_2, u_3, \dots)$

$E^{-1}: U \rightarrow U, u \rightarrow E^{-1}u$  mit  $(E^{-1}u)_n = \begin{cases} u_{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n=0 \end{cases}$

d.h.  $(u_0, u_1, u_2, \dots) \rightarrow (0, u_0, u_1, \dots)$

Bemerkungen:

i)  $EE^{-1}u = u$ , aber  $E^{-1}Eu \neq u$

$E^{-1}Eu = (0, u_0, u_1, \dots) = u - u_0 e^{(0)}$

mit  $e_n^{(j)} = \delta_{jn}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$

ii) Es ist  $E^j = \underbrace{EE \dots E}_{j \text{-mal}}$ , d.h. wir können die  $DG_k$

Schreiben als

$$S(E)u = f$$



### Lemma 3.55

Sei  $DG_k$   $S(E)u = f$  gegeben.

Wir definieren  $v^{(j)} := E^{-j-1} u^{(k-1)}$

mit  $u^{(k-1)}$  Basislösung von  $S(E)u = 0$ .

○ Dann gilt  $S(E)v^{(j)} = e^{(j)} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$

(Hier haben wir jetzt den Link zwischen  
ohne Beweis homogen & inhomogen  $DG$ )

### Satz 3.56

Für  $DG_k$   $S(E)u = f$  gilt

○ i)  $\bar{u} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n v^{(n)}$  ist eine Lösung

ii) Alle Lösungen haben die Gestalt:

$$u = \tilde{u} + \bar{u} \quad \text{mit } \tilde{u} \text{ Lösung von } S(E)u = 0$$

(wieder Lösungsmenge  $k$ -dim!)

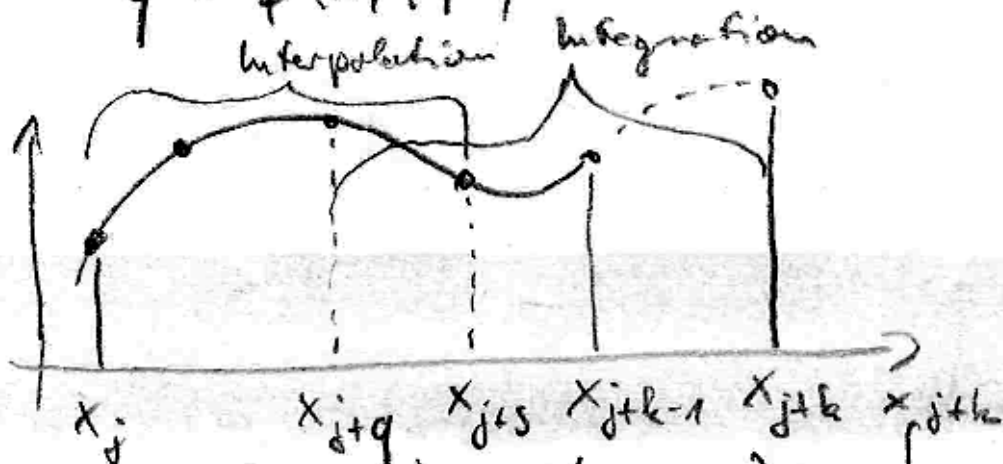
Beweis ohne



### 3.5.2 MSV resultierend aus Quadratur (2)

Ansatz (wieder) über Integration

$y' = f(x, y)$ , Stützstellen  $x_i$



$$y(x_{j+k}) = y(x_{j+q}) + \int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} f(t, y(t)) dt$$

mit  $0 \leq q < k$

Idee: Quadratur

$$\int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} f(t, y(t)) dt \approx h \sum_{i=0}^s b_i \underbrace{f(x_{j+i}, y_{j+i})}_{=: f_{j+i}}$$

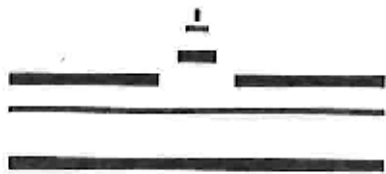
mit  $0 \leq s \leq k$

liefert lineares MV

$$y_{j+k} = y_{j+q} + h \sum_{i=0}^s b_i f_{j+i}$$

Wie bestimmen wir die  $b_i$  Faktoren?

Wie bei Quadratur über Interpolation!



③

$$y(x_{j+k}) \approx y(x_{j+q}) + \int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} p_j(t) dt$$

$$p_j \in \mathcal{P}_S, \quad p_j(x_{j+i}) = f_{j+i} \quad \forall i = 0, \dots, S$$

(Interpolation)

Lagrange - Ansatz:

$$p_j(t) = \sum_{i=0}^S L_{ij}(t) f_{j+i}, \quad L_{ij}(t) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^S \frac{t - x_{j+l}}{x_{j+i} - x_{j+l}}$$

$$\Rightarrow b_i = \frac{1}{h} \int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} L_{ij}(t) dt$$

Anmerkung: Auf äquidistanten Gittern  $b_i$  unabh. von  $h$  und  $j$

Wir erhalten

$$y_{j+k} - y_{j+q} = h \underbrace{\sum_{i=0}^S b_i f(x_{j+ih}, y_{j+i})}_{= \varphi}$$

mit charakter. Polynome

$$\rho(t) = t^k - t^q \quad \text{und} \quad \sigma(t) = \sum_{i=0}^S b_i t^i$$

Berechnung der Koeffizienten  $b_i$ ?

Konstruktion über Verschiebeoperatoren.

①

Def 3.57 Rückwärtsdifferenz

$D: U \rightarrow U$ ,  $u \rightarrow Du$  mit  $(Du)_n = u_n - (E^{-1}u)_n$

d.h.  $Du = (I - E^{-1})u$

Gzw.  $(u_0, u_1, u_2, \dots) \rightarrow (u_0, u_1 - u_0, u_2 - u_1, \dots)$

Für Potenzen von  $D$  gilt

$$(D^2 u) = D(u_0, u_1 - u_0, u_2 - u_1, \dots)$$

$$= (u_0, u_1 - 2u_0, u_2 - 2u_1 + u_0, \dots)$$

$$\text{d.h. } (D^2 u)_n = u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

mit  $u_n = 0 \quad \forall n < 0$

Allgemein

$$(D^m u)_n = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} u_{n-j}$$

$$\text{Gzw. } u_{n-m} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (D^j u)_n$$



### Satz 3.58 Interpolationspolynom für äquidistante Stützstellen

Sei  $x_i = a + ih$ ,  $f_i = f(x_i)$  gegeben

Für  $i \geq m$  definieren wir

$$\pi_{i-m}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{t}{j} (D^j f)_i$$

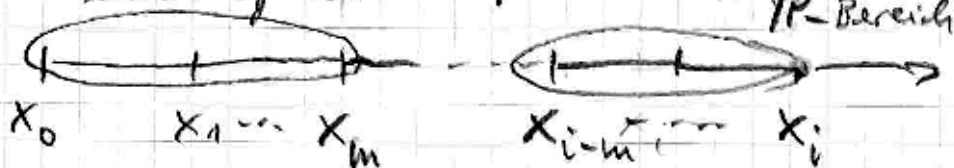
mit  $t = \frac{(x_i - x)}{h}$

Die Binomialkoeffizienten können in der üblichen Def. auch für reelle  $t$  verwendet werden:  $\binom{t}{j} = \frac{t(t-1)\dots(t-j+1)}{j!} \in \mathbb{P}_j$

Dann ist für  $i \geq m$   $\pi_{i-m} \in \mathbb{P}_m$  das eindeutig bestimmte IP mit

$$\pi_{i-m}(x_{i-l}) = f_{i-l} \quad \forall l = 0, \dots, m$$

erste Möglk. zu interpolieren



Beweis  $i \geq m$

③

1.  $\prod_{i=m}^m \in P_m$ , da alle Binomialkoeff. in  $P_m$  sind

2. Sei  $l \leq m$ , dann ist

$$\frac{(x_i - x_{i-l})}{h} = l \Rightarrow \binom{(x_i - x_{i-l})/h}{j} = \binom{l}{j}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=m}^m (x_{i-l}) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \underbrace{\binom{l}{j}}_{=0 \text{ für } j > l} (D^j f)_i$$

$$= \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} (D^j f)_i$$

$$\stackrel{(3.57)}{=} f_{i-l}$$

□

Beispiel 3.58  $m=2$

$$\rightarrow \prod_{i=2}^2(x) = D^0 f_i - \binom{2}{1} D f_i + \binom{2}{2} D^2 f_i$$

$$= f_i - \frac{x_i - x}{h} (f_i - f_{i-1}) + \frac{(x_i - x)(x_{i-1} - x)}{2h^2} (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})$$

(Newtonform des IP)

Damit läßt sich nun ein LMV konstruieren



Wir wählen  $k=2, q=0$

Für

$$y(x_{j+k}) - y(x_{j+q}) = \int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} f(t) dt$$

$$\approx \int_{x_{j+q}}^{x_{j+k}} p_j(t) dt$$

allgemein

setzen wir  $p_j = \prod_{(j+s)-r} r$

$$\dots = h \sum_{i=0}^s (-1)^i \underbrace{\int_0^r \binom{t}{j} ds}_{\gamma_i} (D^i f)_{j+ts}$$

an und erhalten

für  $s=k, r=k-q$  ein implizites Verfahren,  
welches St  $\gamma_i$  bis  $f_{j+k}$  nutzt.

Sortieren der  $\gamma_i$  bzgl. der Stützstellen  
(je 2 Beiträge in  $(D^i f)_{j+ts}$ ) liefert  
die Koeffizienten  $b_i$ .



Für unser Beispiel wählen wir

$$\begin{aligned}
 y_{j+2} - y_j &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} b_{(j+2)-2}(t) dt \\
 &= h \left[ \int_0^2 1 ds f_{j+2} - \int_0^2 (2-s) ds (f_{j+2} - f_{j+1}) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^2 \frac{(2-s)(1-s)}{2} ds (f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j) \right] \\
 &= h \left[ 2 f_{j+2} - 2(f_{j+2} - f_{j+1}) + \frac{1}{3}(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j) \right] \\
 &= \frac{h}{3} (f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j)
 \end{aligned}$$

Dies ist das Milne-Simpson-Verfahren mit  $k=2$ .

Bemerkung 3.60 (Koeffizienten durch Integration)  
 je nach Wahl von  $r, s$  erhalten wir 4 typische  
 Verfahrenansätze:

	$r=1$	$r=2$
(explizit) $S=k-1$	Adams-Bashforth	Nystrom
(implizit) $S=k$	Adams-Moulton	Milne-Simpson

• Interpolation auf  $f_j \dots f_{j+s}$

• Startpunkt  $q = k - r$

Bemerkung 3.61

Die Koeffizienten  $b_i$  berechnen wir  
für das Polynom  $\Pi_{s-r}$   
(unabh. von aktueller Position  $j$ !)

Umsortieren der Terme  $y_i^*$  liefert

$$b_{s-l} = (-1)^l \sum_{i=l}^s \binom{i}{l} y_i^* \quad 0 \leq l \leq s$$

(d.h.  $i = s - l$ )

$$\text{mit } y_i^* = \int_{q-k}^{k-s} \binom{t+i-1}{i} dt$$

Außerdem:

Mit  $a := q - k = -r$ ,  $b := k - s$  erhalten  
wir die  $y_i^* = y_i^*(a, b)$  als Taylorkoeff

$$\text{von } g(z, a, b) := \frac{(1-z)^{-a}}{\ln(1-z)} - \frac{(1-z)^{-b}}{\ln(1-z)}$$

bei Entwicklung um  $z = 0$ , d.h.

$$g(z, a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^*(a, b) z^i$$

### Satz 3.62 Konsistenz

(2)

Sei  $f \in C^{s+1}$  und  $\Phi = (S, \sigma)$  ein Mehrschrittverfahren, beruhend auf Quadratur, dann hat  $\Phi$  die Konsistenzordnung  $s+1$ , (falls die Anfangswerte  $\neq$   $s+1$  haben)

[für  $k$  gerade,  $s = k$ ,  $q = 0$  gilt sogar  $s+2$ !]

Beweis:  $p$  ist IP mit  $s+1$  SSF  $\Rightarrow \|f - p\| = O(h^{s+2})$

$$\tau_h(x, \hat{y}(x)) = \frac{1}{h} \left[ \hat{y}(x+kh) - \tilde{y}(x+qh) \right]$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x+qh}^{x+kh} \tilde{y}'(t) dt - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^s b_i f(x+ih, \tilde{y}(x+ih))$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x+qh}^{x+kh} f(t) - p(t) dt$$

$$= O(h^{s+1})$$

□



### 3.5.3 MSV resultierend aus numerischer Differentiation (BDF-Verfahren)

Idee: setze  $y'(x_{j+q}) = f(x_{j+q})$  an  
interpoliere Daten  $(x_j, y_j) \dots (x_{j+k}, y_{j+k})$   
mit  $p(x)$ .

Für  $q = k$  erhalten wir implizites  
 $0 \leq q < k$   $\rightarrow$  explizites  
Verfahren.

Ansatz:

$$h \cdot p'(x_{j+q}) = h f(x_{j+q}, y_{j+q})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^k \underbrace{(L'_{ij}(x_{j+q})h)}_{=: a_i} y_{j+i} = h \underbrace{f(x_{j+q}, y_{j+q})}_{=: f}$$

auch hier sind  $a_i$  unabh. von  $j$  und  $h$   
 $\rightarrow$  "backward differentiation formula"  
BDF- $k$  Verfahren  $\Phi = (S, \sigma)$

$$S(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i \quad \sigma(t) = t^q$$

(9)

Vereinfachte Konstruktion durch  
äquidist. Gitter über

$$p(x) = \prod_{j+k} -k(x)$$

Satz 3.63 Konsistenz BDF

Sei  $f \in C^k$  dann hat ein BDF-k

Verfahren Konsistenzordnung  $k$

(falls die Startwerte  $\rightarrow$   $k$  haben).  $\circ$

Beweis analog zu 3.62

$\rightarrow$  Übungsaufgabe

$\square$

$\circ$



### 3.5.4 Konsistenz & Stabilität

Satz 3.64 Sei  $\Phi(S, \sigma)$  ein MSV mit  $k \geq 1$

und AW  $y_0, \dots, y_{k-1}$ . Dann ist

(1)  $\Phi$  ist konsistent:

$$\Leftrightarrow (2) \begin{cases} a) y_i \rightarrow \tilde{y}(0) \text{ für } h \rightarrow 0, i=0 \dots k-1 \\ b) S(1) \tilde{y}(x) = 0 \\ c) \varphi(x, \tilde{y}(x), \dots, \tilde{y}(x+kh), h) \\ \quad - S'(1) \varphi(x, \tilde{y}(x)) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \end{cases}$$

Beweis "  $\Rightarrow$  "

a) folgt aus Konsistenz

b) Es gilt  $S(1) = \sum_{i=0}^k a_i$  und  $S'(1) = \sum_{i=0}^k i a_i$  (\*)

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^k a_i \tilde{y}(x+ih) \stackrel{\text{(Taylor)}}{=} \sum_{i=0}^k a_i [\tilde{y}(x) + ih \tilde{y}'(x) + o(h)]$$

$$\stackrel{(*)}{=} S(1) \tilde{y}(x) + S'(1) h \tilde{y}'(x) + o(h)$$

$$\Rightarrow \tau_h(x, \tilde{y}(x)) = \frac{1}{h} [S(1) \tilde{y}(x) + S'(1) h \tilde{y}'(x)] \quad (**)$$
$$- \varphi(x, \tilde{y}(x), \dots, h) + o(1)$$



$$\Rightarrow \left| \frac{S(1) \tilde{y}(x)}{h} \right| \leq |\tau_h(x, \tilde{y})| + |S'(1) f(x, \tilde{y}) - f(\dots)| + o(1)$$

$$\leq C, \quad C \text{ unabh. von } h$$

$$\Rightarrow S(1) \tilde{y}(x) = 0$$

c) Einsetzen in (\*\*\*) liefert:

$$S'(1) f(x, \tilde{y}) - f(\dots) = o(1)$$

" $\Leftarrow$ " folgt direkt aus (\*\*\*)

Korollar 3.65

Ist  $\Phi(S, \sigma)$  lineares MSV,  $k \geq 1$ , so gilt

insbesondere:

(1)  $\Phi$  ist konsistent

$$\Leftrightarrow (2) \begin{cases} y_i \rightarrow \tilde{y}_i^0 \text{ für } h \rightarrow 0, \quad i=0, \dots, k-1 \\ S(1) = 0 \\ S'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

Beweis  $\sigma(1) = \sum_{i=0}^k b_i$

$$\Rightarrow f(\dots) = \sum_{i=0}^k b_i f(x+ih, \tilde{y}(x+ih))$$

$$= \sum_{i=0}^k b_i f(x, \tilde{y}(x)) + o(1)$$

$$= \sigma(1) f(x, \tilde{y}(x)) + o(1)$$

mit 3.64 folgt

$$S'(1) = \sigma(1) \Leftrightarrow f(\dots) - S'(1) f(x, \tilde{y}(x)) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

□

### Def 3.67 Asymptotische Stabilität

Sei  $\Phi(s, \sigma)$  MSV,  $k \geq 1$ , und AW  $y_0 \dots y_{k-1}$  gegeben. Sei Folge  $(y_i)$  L6s des MSV

und  $(v_i)$  L6s zu gest6rten AW  $v_0 \dots v_{k-1}$  bzw. gest6rte Berechnungen.

Der Fehler wird beschrieben durch

$$(\bar{F}_h(v))_i := v_i - y_i, \quad i = 0 \dots k-1$$

$$(\bar{F}_h(v))_{j+k} := \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{i+j} - \rho(x_j, v_0, \dots, v_{j+k}, h), \quad j \geq 0$$

$\bar{F}_h$  hei6t Defektfunktion.

Das Verf. hei6t asymptotisch stabil

genau dann, wenn ein  $K > 0 \exists$ , so dass

$\forall v, w: \mathbb{I}_h \mapsto \mathbb{R}, \quad h < H$  gilt

$$\|v - w\|_\infty \leq K \|\bar{F}_h(v) - \bar{F}_h(w)\|_\infty$$



Bemerkungen, 3.68

i)  $F_h(y) = 0$  beschreibt implizit die LÖS der AWP.

ii) Ist  $F_h(v_h) = \varepsilon_h$ ,  $\varepsilon_h$  Störterm, z.B. Rundungsfehler,  
so folgt aus Stabilität

$$\|y_h - v_h\|_\infty \leq K \|F_h(y) - F(v_h)\|_\infty = K \|\varepsilon_h\|_\infty$$

d.h. max Fehler der Lösung läßt sich  
durch max Fehler der Rechnung abschätzen

→ entspricht der "klassischen" Def von  
Stabilität

iii) Nur wenn die DG stabil ist, ist das

MSV stabil

→ ansatz für unsere Stabilitätsuntersuchung.

$$iv) F_h(\tilde{y}_{j+k}) = \tau_h(x_{j+k}, \tilde{y})$$

Ziel Aussage zur Stabilität, Bew. Konvergenz  
der Art

### Satz 3.69

Für  $\Phi(p, \sigma)$  MSV mit  $k \geq 0$  gelte:

- i)  $f=0 \Rightarrow \ell=0$  (für lineare MSV  
immer erfüllt!)
- ii)  $\Phi$  Lipschitzstetig bzgl. AW, d.h.

$\exists L > 0$ , so dass

$$\begin{aligned} & \|\Phi(x, y_0, \dots, y_k, h) - \Phi(x, w_0, \dots, w_k, h)\| \\ & \leq L \max_{0 \leq i \leq k} |y_i - w_i| \quad \forall h \in H \end{aligned}$$

Dann sind äquivalent

- (1)  $\Phi$  asymp. stabil
- $\Leftrightarrow$  (2)  $\Phi$  erfüllt Wurzelbed. von Dahlquist

Beweis " $\Rightarrow$ ":

$\Phi$  asymp. stabil, d.h.  $\exists K > 0$ , so dass

$$\|v - w\| \leq K \|\Phi_u(v) - \Phi_u(w)\|_\infty = \|\Phi_u(v - w)\|_\infty$$

$\forall v, w: I_u \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Rightarrow \|w\|_\infty \leq K \|\Phi_u(w)\|_\infty \quad \forall w: I_u \rightarrow \mathbb{R}$$

und für  $\tilde{u}$ , Lös der homogenen Gleichung

$$\Phi_u(\tilde{u})_{j+k} = 0, \quad j > 0 \text{ folgt}$$

$$\|\tilde{u}\|_{\infty} = K \max_{0 \leq i \leq k-1} |\tilde{u}_i|$$

$\Rightarrow$  (bzw.  $\|\tilde{u}\| \leq K \max_{0 \leq i \leq k-1} |\tilde{u}_i|$  für bel. Norm)

$\Rightarrow$  Lös der homog DG erfüllt  
(Satz 3.53)

$\Rightarrow$  Wurzelbed. erfüllt

" $\Leftarrow$ ": Sei  $v, w: I_h \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$(F_h(v) - F_h(w))_i = v_i - w_i, \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$(F_h(v) - F_h(w))_{j+k} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i (v_{j+i} - w_{j+i})$$

Es sei  $\delta_k := v_k - w_k$  und  $d_k := (F_h(v) - F_h(w))_k$

Ziel:  $(\delta_k)$  durch  $(d_k)$  abschätzen

1. Schritt Zurückführen auf Basislös. der homog. DG.

$$\text{Sei } \eta_k := d_{k+k} + f(x_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+k}, h) - f(x_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+k}, h) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^k a_i \delta_{i+j} = h \eta_j \quad (\text{eine Lös der inhomog. DG!})$$

Mit 3.56 folgt (Umform. zu inh. DG)

$$\delta_{j+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i u_{j+k}^{(i)} + \sum_{l=0}^j h \eta_l u_{j+k-l-1}^{(k-1)} \quad (**)$$

↑  
Basislös. der homog. DG

Nach (i) und mit Satz 3.53 (Wurzelbed.)  
folgt  $|u_n^{(i)}| \leq M, n \geq 0, i = 0 \dots k-1.$

(ii)

$$\text{Aus (*)} \Rightarrow |\eta_l| \leq |d_{l+k}| + L \underbrace{\max_{0 \leq i \leq k} |\delta_{l+i}|}_{=: \varepsilon_l}$$

Für  $i = 0 \dots k-1$  gilt  $\delta_i = d_i$ , damit folgt

$$\begin{aligned} \text{aus (**)} \Rightarrow |\delta_{j+k}| &\leq M d_k + M h \sum_{l=0}^j (d + L \varepsilon_l) \\ &= M d(k + (j+1)h) + h M L \sum_{l=0}^j \varepsilon_l \quad (***) \end{aligned}$$

mit  $d_l := \max_l (d_l) = \|F_h(v) - F_h(w)\|_\infty$

[Was machen wir mit  $\sum_l \varepsilon_l$  ?]

RHS wächst monoton in  $j$

$$\Rightarrow \varepsilon_j \leq M d(k + (j+1)h) + h M L \sum_l \varepsilon_l$$

$$\Rightarrow \varepsilon_j (1 - h M L) \leq M d(k + (j+1)h) + M L \sum_{l=0}^{j-1} h \varepsilon_l$$





Für  $h \in \frac{1}{2ML} := H$  ist  $hML \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \varepsilon_j \leq \underbrace{2M(k + (b-a))}_{=: c} d + \underbrace{2ML}_{=: D} \sum_{l=0}^{j-1} h \varepsilon_l$$

Gronwall

$$\Rightarrow \varepsilon_j \leq \underbrace{c e^{D(b-a)}}_{=: K} d$$

Einsetzen in  $(*)$  liefert

$$|\delta_{j+k}| \leq |\varepsilon_{j+1}| \leq K |d|$$

$$\Rightarrow \|v - w\|_\infty \leq K \|F_u(v) - F_u(w)\|_\infty \quad \square$$

## Bemerkung 3.70

1

i) Für  $L$ -stetiges  $f$  sind ESV stabil  
(Specialfall)

ii) Für  $\Phi = (\mathcal{S}, \sigma)$  und  $f$   $L$ -stet. gilt

$\Phi$  stabil  $\Leftrightarrow \Phi_0 = (\mathcal{S}, 0)$  stabil

Satz 3.71 Konvergenzsatz von Dahlquist

Sei  $\Phi = (\mathcal{S}, \sigma)$  MSV mit  $k \geq 1$  konsistent<sup>o</sup>

mit Ord.  $p \geq 1$  und Vorauss. aus 3.69

erfüllt, dann gilt:

(1)  $\Phi$  ist konvergent mit Ord.  $p$

$\Leftrightarrow$  (2)  $\Phi$  ist asympt. stabil

o

Beispiel 4.2.1 FE Matrix für Poisson-Prob.

Poissonproblem:  $u'' = f$  auf  $I$

$u = 0$  auf  $\partial I$

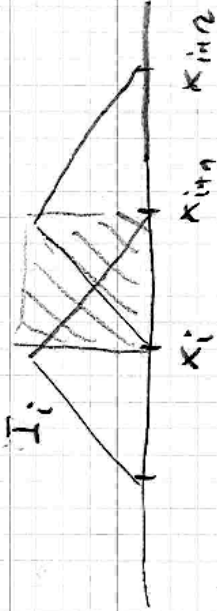
→ Schwache Formulierung:

$$\text{Gesucht } u \in H_0^1(I) \text{ mit } \int_I u' v' dx = \int_I f v dx \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Wähle diskreten Raum  $V_h$  nach 4.2.0  
und  $I_h = \{x_i\}$ ,  $x_i = ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$

$$A_{ij} = \int_I \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx$$

$$A_{i(i+1)} = \int_{I_i} \frac{-1}{h_i} \cdot \frac{1}{h_i} dx = -\frac{1}{h}$$



$$A_{ii} = \int_{I_{i-1} \cup I_i} (\nabla \phi_i)^2 = \frac{2}{h}, \quad A_{ij} = 0 \quad \forall j \text{ mit } |i-j| > 1$$