

Gauß-Quadraturen

Gauss-Legendre-Quadratur

$\omega(x) = 1$, Intervall $[-1, 1]$.

Gauß-Quadraturen

Gauss-Legendre-Quadratur

$\omega(x) = 1$, Intervall $[-1, 1]$.

$p_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} P_n(x)$, wobei $P_n(x)$ die **Legendre-Polynome** sind mit

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

Gauß-Quadraturen

Gauss-Legendre-Quadratur

$\omega(x) = 1$, Intervall $[-1, 1]$.

$p_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} P_n(x)$, wobei $P_n(x)$ die **Legendre-Polynome** sind mit

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

Fehler: $R(f) = I(f) - Q_n(f) = 2^{2n} \frac{n+1}{2n+2} \frac{(n!)^4}{((2n+1)!)^3} f^{(2n+2)}(\xi).$

n=1 $Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ("2-Punkt-Gauß-Quadratur").

n=2 $Q_2(f) = \frac{1}{9} \left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right).$

Gauß-Quadraturen

Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

$$\omega(x) = \sqrt{1-x^2}^{-1}, \text{ Intervall } [-1, 1].$$

Gauß-Quadraturen

Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

$$\omega(x) = \sqrt{1-x^2}^{-1}, \text{ Intervall } [-1, 1].$$

$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ und T_n die **Tschebyscheff-Polynome** 1. Art mit

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \\ \Rightarrow T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Nullstellen von p_{n+1} : $x_j^{(n)} = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+1}\pi\right) \quad j = 0, \dots, n.$

Gewichte: $\omega_j^{(n)} = \frac{\pi}{n+1}.$

Gauß-Quadraturen

Übersicht, spezielle Quadraturen

Name	Intervall	Gewicht
Gauß-Legendre	$[-1, 1]$	$\omega = 1$
Gauß-Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$\omega = 1/\sqrt{1-x^2}$
Gauß-Jacobi	$[-1, 1]$	$\omega = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
Gauß-Laguerre	$[0, \infty)$	$\omega = e^{-x}$
Gauß-Hermite	$(-\infty, \infty)$	$\omega = e^{-x^2}$

Gauß-Quadraturen

Übersicht, spezielle Quadraturen

Name	Intervall	Gewicht
Gauß-Legendre	$[-1, 1]$	$\omega = 1$
Gauß-Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$\omega = 1/\sqrt{1-x^2}$
Gauß-Jacobi	$[-1, 1]$	$\omega = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
Gauß-Laguerre	$[0, \infty)$	$\omega = e^{-x}$
Gauß-Hermite	$(-\infty, \infty)$	$\omega = e^{-x^2}$

Gauß-Jacobi: $p_n(x) = J_n(x, \alpha, \beta)$ mit

$$J_n(x, \alpha, \beta) := \frac{1}{2^n n! \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n \omega(x)) .$$

Gauß-Quadraturen

Spezielle Quadraturen

Gauß-Laguerre: $p_n(x) = (-1)^n L_n(x)$ mit Laguerre-Polynome L_n :

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x \quad \text{und}$$

$$L_{n+1}(x) = (1 + 2n - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x).$$

Gauß-Hermite: $p_n(x) = 2^n H_n(x)$ mit Hermite Polynomen H_n :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \quad \text{und}$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$