Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
M.Sc. Falk Meyer

25. Juni 2015

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Blatt 10

Abgabe bis Donnerstag 02.07. 10 Uhr in den Kästen der Übungsgruppen

Aufgabe 1 (Diskretes Lemma von Gronwall) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Folgen mit $e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n$ für $n < N$. Dann gilt:

$$e_n \leq \left(e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j\right) \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} q_j\right)$$

für $n < N$.

Aufgabe 2 (3-stufige Runge-Kutta-Verfahren) (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle 3-stufigen Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 3.

Aufgabe 3 (Explizite Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)

Gegeben sei die Schar von linearen AWPen $y'(x) = \lambda y(x)$, $y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0$, $x \in I = [0, 1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ mit $u_0 = y_0$ durch ein explizites Runge-Kutta Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie, dass es ein Polynom P höchstens m-ten Grades gibt mit

$$u_i = (P(\lambda h))^i u_0.$$

Bestimmen Sie das Polynom P für das verbesserte Euler Verfahren und für das klassische Runge-Kutta Verfahren. Vergleichen Sie es jeweils mit der Taylorentwicklung in y_0 für die exakte Lösung des AWPs.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Schreiben Sie ein *python* Programm zum Lösen des AWPs $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit Hilfe allgemeiner, expliziter Runge-Kutta Verfahren. Beachten Sie hierbei:

(a) Ihr Programm enthält eine Funktion, die das Verfahren umsetzt, und als Parameter ein Butcher-Tableau, die Funktion f, die Schrittweite h, den Startwert y_0 und den Wert x erhält. Die Funktion gibt die berechnete Lösung für gegebenes x zurück.

(b) Die Ausgabe Ihres Programms ist die Lösung und der Fehler zur exakten Lösung für gegebene Schrittweiten h.

Testen Sie Ihre Implementation mit dem verbesserten Euler- und klassischen Runge-Kutta Verfahren an $f(x,y) = \frac{\cos(x)}{4y^3}$ und dem Anfangswert $y(0) = 1$ zur Approximation von $y(4)$ für $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 10$. Die exakte Lösung ist $y(x) = (\sin(x) + 1)^{0.25}$.