Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
M.Sc. Falk Meyer

04. Juni 2015

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Blatt 7

Abgabe bis Donnerstag 11.06. 10 Uhr in den Kästen der Übungsgruppen

Aufgabe 1 (Konstruktion einer Quadraturformel) (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Quadraturformel der Form

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) \mathrm{d}x = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(x_1) + \omega_2 f(x_2),$$

mit $\omega_2 \in \mathbb{R}$ und $0 < x_1 < x_2$, die exakt auf $\mathbb{P}_3$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie dazu $f(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2 (Tschebyscheff Polynome) (4 Punkte)

Bei der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur werden als orthogonale Polynome $p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ mit Tschebyscheff-Polynomen 1. Art T_n verwendet. Diese sind für $n \geq 0$ definiert durch:

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$$

Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 1$ gilt:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

(b) $2^{-n} T_{n+1}(x)$ ist für $n \geq 0$ ein Polynom vom Grad $n+1$ mit Höchstkoeffizient 1.

(c) T_n sind orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d.h.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Aufgabe 3 (Gaußsche Quadraturformel) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es keine Interpolationsquadratur Q_n vom Grad n gibt, welche für $\mathbb{P}_{2n+2}$ exakt ist.

(b) Sei $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ das eindeutig bestimmte Polynom mit $p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$ für ein $f \in \mathcal{C}^{2n+2}(a,b)$, $i = 0, \ldots, n$. $x_0, \ldots, x_n$ seien die Nullstellen von p_{n+1} und Q_n die zugehörige Gaußsche Quadraturformel. Zeigen Sie:

$$Q_n(f) = Q_n(p) = I(p)$$

(c) Zeigen Sie: Aus (b) folgt, dass für einen Zwischenwert $\xi \in (a,b)$ gilt:

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} \langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle_\omega$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}([a,b]), N \in \mathbb{N}, h = \frac{b-a}{N}$ gegeben. Die zusammengesetzte Trapezregel ist definiert durch

$$\alpha(h) := \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh).$$

Die Folge $(\alpha(h))_{h \to 0}$ approximiert das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (Romberg-Integration).
Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson-Extrapolation eine Näherung von $\alpha(0)$ für $N_k = 2^k$, also $h_k = \frac{(b-a)}{N_k}$ und $q = 2$. Beachten Sie hierbei:

(a) Ihr *python* Programm enthält eine Funktion zur Berechung der zusammengesetzten Trapezregel für gegebenes f, a, b, h und N.

(b) Eine weitere Funktion bestimmt per Richardson-Extrapolation die gesuchte Näherung für $\alpha(0)$ und eine gegebene Folge h_k.

(c) Ausgabe ist der Wert der Näherung $\alpha(0)$ für gegebenes k.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ für $a = 0, b = 1$ und $k = 2, 4, 8, 16$.