Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
M.Sc. Falk Meyer

14. Mai 2015

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Blatt 5

Abgabe bis Donnerstag 21.05. 10 Uhr in den Kästen der Übungsgruppen

Aufgabe 1 (Gauss Elimination für tridiagonale Matrizen) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine tridiagonale Matrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & 0 \\ & b_3 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Es gelte

$$\begin{aligned} &|a_1| > |c_1| > 0, \\ &|a_i| \geq |b_i| + |c_i|,\ b_i \neq 0, c_i \neq 0,\ 2 \leq i \leq n-1, \\ &|a_n| > |b_n| > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Seien $\alpha_1 := a_1$, $\gamma_1 := c_1\alpha_1^{-1}$ und $\alpha_i := a_i - b_i\gamma_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$, $\gamma_i := c_i\alpha_i^{-1}$ für $2 \leq i \leq n-1$ definiert. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

$$|\gamma_i| < 1,\ 1 \leq i \leq n-1,$$
$$0 < |a_i| - |b_i| < |\alpha_i| < |a_i| + |b_i|,\ 2 \leq i \leq n.$$

(b) A besitzt die LR-Zerlegung $A = LR$ mit tridiagonalen Matrizen $L = \text{tridiag}(b_i, \alpha_i, 0)$ und $R = \text{tridiag}(0, 1, \gamma_i)$.

(c) A ist regulär.

(d) Die Anzahl der benötigten Operationen zur Berechnung der Zerlegung $A = LR$ und zur Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe dieser Zerlegung ist $\mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 2 (Fehlerabschätzung für kubische Splineinterpolation) (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^4$ gegeben. Sei s der kubische Spline mit den Stützstellen $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ und $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$. Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung für $h := b - a$:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|.$$

Aufgabe 3 (Kubische Spline Interpolation) (4 Punkte)

Sei $f(x) = x^4$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegeben. Interpolieren Sie f durch einen kubischen Spline g mit den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ und den Bedingungen

$$g'(-1) = f'(-1), g'(1) = f'(1).$$

Erstellen Sie eine Skizze der Funktion und des Splines. Welche Eigenschaft von f auf $[-1, 1]$ lässt sich hier nutzen?

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta := \{0 = x_0 < \ldots < x_n = 1\}$ und $s \in S_\Delta^{1,0}$ der lineare, interpolierende Spline von f auf $[0, 1]$.

(a) Wir definieren als Approximation für den $\|\cdot\|_\infty$-Fehler für $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$:

$$e_{\Delta,m} := \max_{x \in \Delta_m} |f(x) - s(x)|,$$

wobei Δ_m das m-fach unterteilte Gitter Δ bezeichnet, d.h.

$$\Delta_m := \Delta \cup \{x_i + r(x_{i+1} - x_i)/m \mid i = 0, \ldots, n-1, r = 1, \ldots, m-1\}.$$

Schreiben Sie eine *python* Funktion, die die Stützstellen Δ und den Unterteilungsgrad m sowie die Funktion f als Eingabe erhält und den Fehler $e_{\Delta,m}$ berechnet.

(b) Geben Sie den Fehler $e_{\Delta,m}$ für $m = 10$, $x_k = k/n$, $k = 0, \ldots, n$ und $n = 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127$ aus. Wiederholen Sie dies für die Knotenwahl $x_k = (k/n)^4$.

(c) Seien Δ und Δ' zwei Mengen von Interpolationspunkten mit unterschiedlicher Anzahl von Punkten, d.h. $|\Delta| \neq |\Delta'|$. Die experimentelle Konvergenzordnung (*Experimental Order of Convergence* oder kurz *EOC*) des Interpolationsfehlers ist definiert als

$$EOC(\Delta, \Delta') := \left| \frac{\ln(e_{\Delta,m}/e_{\Delta',m})}{\ln(|\Delta|/|\Delta'|)} \right|.$$

Berechnen Sie die Größe für alle aufeinanderfolgenden Glieder obiger n-Sequenzen und geben Sie diese aus.