

Übung zur Vorlesung
Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Blatt 4

Abgabe bis Freitag 15.05. 10 Uhr in den Kästen der Übungsgruppen

Aufgabe 1 (Schnelle Fouriertransformation) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) := x$.

- (a) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, das komplexe trigonometrische Interpolationspolynom t^* zu f auf $[0, 2\pi]$ mittels schneller Fourier Transformation.
- (b) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, das reelle trigonometrische Interpolationspolynom t zu f auf $[0, 2\pi]$.
- (c) Vergleichen Sie die Polynome t und $\operatorname{Re}(t^*(x))$ und fertigen Sie eine Skizze dieser Funktionen an (zum Beispiel mit *python*).

Aufgabe 2 (Trigonometrische Polynome) (4 Punkte)

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k, f_x) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k = 2\pi \frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq (n-1)$. Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ das zugehörige eindeutig bestimmte Interpolationspolynom. Für $s \leq (n-1)$ sei

$$p_s := \sum_{j=0}^s c_j e^{ijx}.$$

Zeigen Sie, dass unter allen trigonometrischen Polynomen $q_s \in T_{s-1}$, $0 \leq s \leq (n-1)$ gerade p_s die folgende Fehlerquadratsumme minimiert:

$$s(q_s) = \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q_s(x_k)|^2$$

Aufgabe 3 (B-Splines) (4 Punkte)

Für eine Knotenfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $t_i < t_{i+1}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$ seien für $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ die B-Splines B_{ik} vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$B_{i0} := \begin{cases} 1, & \text{für } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$B_{ik} := \omega_{ik}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x),$$

wobei

$$w_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}, & \text{für } t_i < t_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Berechnen und skizzieren Sie $B_{i1}, B_{(i+1)1}$ und B_{i2} .
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ folgendes gilt:
 - (i) $B_{ik}|_{[t_j, t_{j+1}]} \in \mathbb{P}_k$,
 - (ii) $\text{supp}(B_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$,
 - (iii) $B_{ik} > 0, \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ik}(x) = 1$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Implementieren Sie die schnelle Fourier Transformation nach dem Algorithmus aus der Vorlesung in *python*. Beachten Sie hierbei:

- (a) Ihr Programm enthält eine Funktion, die die schnelle Fourier Transformation durchführt. Der Funktion wird eine Liste der zu interpolierenden Funktionswerte übergeben.
- (b) Ihre Funktion gibt das Tupel der Polynomkoeffizienten zurück.
- (c) Plotten Sie den Realteil des resultierenden Interpolationspolynoms sowie f und geben Sie zusätzlich die berechneten Polynomkoeffizienten aus.

Testen Sie Ihre Implementation für $n = 3$ und $n = 7$ für Stützstellen $x_k = \frac{2\pi}{n+1}k, k = 0, \dots, n$, an folgendem Rechteckfenster:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$