Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
M.Sc. Falk Meyer

23. April 2015

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Blatt 2

Abgabe bis Donnerstag 30.04. 10 Uhr in den Kästen der Übungsgruppen

Aufgabe 1 (Interpolationsfehler) (4 Punkte)

Seien $f(x) = 2^x$ und Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom höchstens zweiten Grades, das an den gegebenen Stützstellen die Werte von f annimmt, mithilfe der Lagrangschen und der Newtonschen Interpolationsformel.

(b) Schätzen Sie den maximalen Interpolationsfehler auf dem Intervall $(-1, 2)$ zwischen dem in (a) bestimmten Polynom und f gegen eine Konstante.
Tipp: Benutzen Sie Satz 1.4 aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Neville Schema) (4 Punkte)

Berechnen Sie $\sqrt{7}$ mithilfe der Polynominterpolation. Seien hierzu Daten $(1, 1)$, $(4, 2)$ und $(9, 3)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$.

(b) Fügen Sie einen weiteren Datenpunkt $(16, 4)$ hinzu und bestimmen Sie wiederum den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$. Vergleichen Sie den Wert mit (a).

Aufgabe 3 (Weitere Eigenschaften der dividierten Differenzen) (4 Punkte)

Seien $f \in C^0(a, b)$ und $x_0, \ldots, x_n \in (a, b)$ paarweise verschieden, sowie t festgewählt mit $t \neq x_k$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie:

(a) Wenn p das Interpolationspolynom zu f an der Stellen $x_0, \ldots, x_n$ ist, so gilt:

$$f(t) - p(t) = f[x_0, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

(b) Ist $f \in C^n(a, b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Schreiben Sie ein *python* Programm zur Polynominterpolation, welches die Newtonsche Interpolationsformel benutzt. Beachten Sie hierbei:

(a) Ihr Programm enthält eine Funktion, die als Argumente $n \in \mathbb{N}$ und zwei gleich lange Tupel der Größe n, die die zu interpolierenden Daten repräsentieren, erhält.

(b) Rückgabewert der Funktion sollen die Polynomkoeffizienten des Interpolationspolynoms sein.

(c) Das Programm erstellt als Ausgabe einen Plot des interpolierenden Polynoms und der zugehörigen Datenpunkte.

Testen Sie Ihre Implementation an folgenden Datenpunkten:

x_i	0	2	5
$f(x_i)$	2	-3	1

und

x_i	-4	0	2	3
$f(x_i)$	5	4	-10	1