Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
M.Sc. Falk Meyer

16. April 2015

Übung zur Vorlesung

Numerische Analysis

Sommersemester 2015 — Präsenzblatt 2

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen am 20.04. und 21.04.

Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz) (0 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $F : D \to D$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $L \in [0, 1)$. Zeigen Sie:

(a) F hat genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$.

(b) Sei $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, dann gilt $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

(c) $\|\bar{x} - x_k\| \leq L\|\bar{x} - x_{k-1}\|$

(d) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|F(x_0) - x_0\|$ (A priori Fehlerschranke)

(e) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|$ (A posteriori Fehlerschranke)

Aufgabe 2 (Fixpunktiteration) (0 Punkte)

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystem $Ax = b$ können direkte Verfahren (zum Beispiel das Gauß-Verfahren) und iterative Verfahren verwendet werden. Die Idee hinter iterativen Verfahren besteht darin das gegebene Gleichungssystem äquivalent in eine Fixpunktgleichung der Form $x = F(x) = Tx + c$ mit einer Matrix T umzuformen.

(a) Sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir zerlegen $A = M - N$ mit einer regulären Matrix M. Formen Sie nun das System $Ax = b$ in eine entsprechende Fixpunktgleichung um.

(b) Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die durch die Fixpunktiteration zu $x = F(x) = Tx + c$ gegeben ist. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, sodass für die induzierte Matrixnorm $\|T\| < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass x^k gegen ein x mit $Ax = b$ konvergiert.

Aufgabe 3 (Jacobi Verfahren) (0 Punkte)

Getreu Aufgabe 2 arbeitet das iterative Jacobi Verfahren mit $T = \mathbb{I} - D^{-1}A$. Sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ein Startvektor, dann lautet die Iterationsvorschrift mit $M := D = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Dx^{(k)} - Ax^{(k)} + b)$$

Berechnen Sie die ersten 5 Iterationen des Jacobi Verfahrens mit einem selbst gewählten Startvektor zu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.