
Übung zur Vorlesung
Numerische Analysis
Sommersemester 2015 — Blatt Klausurvorbereitung

Wiederholungsblatt zur selbstständigen Bearbeitung

Aufgabe 1 (Polynominterpolation) (0 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom zu folgenden Daten:

x_i	0	2	3
y_i	-2	10	25

- (i) in Lagrange Form.
(ii) in Newton Form mit Hilfe dividierter Differenzen.

- (b) Zeigen Sie die allgemeine Fehlerdarstellung des Interpolationsfehlers.
(c) Zeigen Sie, dass bei gegebenen Daten auf äquidistanten Stützstellen ein eindeutiges Interpolationspolynom existiert, dessen Koeffizienten durch $c_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n y_j e^{-ijx_k}$ gegeben sind.

Aufgabe 2 (Numerische Integration) (0 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie $\int_0^1 \sin(x) \cos(x) dx$ numerisch unter Verwendung der
(i) Mittelpunktsregel.
(ii) Simpsonregel.
- (b) Zeigen Sie, dass genau eine exakte Quadraturformel $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$ auf \mathbb{P}_n bei paarweise disjunkten Stützstellen x_j existiert.
- (c) Zeigen Sie, dass keine exakte Quadratur Q_n auf \mathbb{P}_{2n+2} existiert.

Aufgabe 3 (Einschrittverfahren) (0 Punkte)

- (a) Approximieren Sie $y' = \sin(x)$ mithilfe des expliziten Euler-Verfahrens auf $I = [0, 2]$ mit $y(0) = 1$ bei $h = 0.5$.
- (b) Welche Bedingung muss für die Koeffizienten eines Runge-Kutta-Verfahrens gelten, damit dieses konsistent ist?
- (c) Wie unterscheidet sich das Butcher-Tableau expliziter von impliziter Verfahren?
- (d) Geben Sie die impliziten und expliziten Runge-Kutta-Verfahren erster Ordnung an.
- (e) Zeigen Sie die Konvergenz des Euler-Verfahrens.

Aufgabe 4 (Mehrschrittverfahren) (0 Punkte)

- (a) Approximieren Sie mit dem Mehrschrittverfahren $y_{n+1} = y_n + h(\frac{3}{2}f(x_n, y_n) - \frac{1}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1}))$ die Differentialgleichung $y' = \sin(x) \cos(x)$ auf $I = [0, 1]$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$ für $h = 0.5$.
- (b) Sei $f \in C^k(S)$. Zeigen Sie, dass dann das BDF-k Verfahren die Konsistenzordnung $p = k$ bei hinreichend konsistenten Startwerten hat.
- (c) Welche Begriffe müssen im Zusammenhang mit Mehrschrittverfahren definiert werden?
- (d) Welche Möglichkeiten haben Sie kennengelernt um Mehrschrittverfahren herzuleiten?
- (e) Was ist bei der Bestimmung der Anfangswerte zu beachten?
- (f) Zeigen Sie den Zusammenhang von asymptotischer Stabilität und (p-) Konvergenz.