Übungen zur Numerischen Analysis

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 23.06.2014, 12.00 Uhr

Definition: Runge-Kutta-Verfahren Seien $\alpha_k, \gamma_k, \beta_{kl}$ fest gewählt, $k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k-1$. Die Schrittfunktion φ sei definiert durch

$$\varphi(t_k, y_k, h_k) = \gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_m f_m$$

mit

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k + \alpha_1 h_k, y_k) \\ &\vdots \\ f_m &= f(t_k + \alpha_m h_k, y_k + h_k \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml} f_l) \end{aligned}$$

.

Aufgabe 1: Runge-Kutta-Verfahren (4 Punkte)
In einem Runge-Kutta-Verfahren sei die Normierungsbedingung erfüllt, und es sei $f \in C^2$. Zeigen Sie:

- Für $\sum_k \gamma_k = 1$ hat das Verfahren (mindestens) die Konsistenzordnung 1.
- Gilt zusätzlich $\sum_k \alpha_k \gamma_k = \frac{1}{2}, (k > 0)$, so hat das Verfahren mindestens die Konsistenzordnung 2.

Aufgabe 2: Runge-Kutta-Verfahren (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 3 mit Konsistenzordnung 3.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe, Abgabe: 30.06.2014, 12.00 Uhr) (4 Punkte)
Programmieren Sie das Eulerverfahren, das verbesserte Eulerverfahren, und das Verfahren von Heun. Lassen Sie sich dabei die Möglichkeit offen, auch nichtäquidistante Gitter zu nutzen. Testen Sie Ihre Programme an der Anfangswertaufgabe $y_0(t) = ty(t) + t, y(0) = 1$ auf $I = [0, 1]$.
Berechnen Sie zunächst die analytische Lösung. Wählen Sie dann die äquidistante Schrittweite für die einzelnen Verfahren so, dass jeweils die gleiche Anzahl von Funktionsauswertungen von f benutzt werden, und berechnen Sie die numerischen Lösungen für 20, 40 und 80 Auswertungen.
Stellen Sie den globalen Diskretisierungsfehler für alle Verfahren und gleiches N jeweils zusammen graphisch dar, normal und logarithmisch.
Hinweis: Am einfachsten gehen Sie vor, wenn Sie ein einheitliches Gerüst für explizite Einschrittverfahren programmieren und dann nur noch die unterschiedlichen Verfahrensfunktionen einsetzen.