

## Übungen zur Numerischen Analysis

Übungsblatt 6, Abgabe: Montag, 02.06.2014, 12.00 Uhr

**Aufgabe 1: Differenzenformeln optimaler Konsistenz (4 Punkte)**Gegeben sind  $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$ . Berechnen sie dafür

- Eine Differenzenformel für die erste Ableitung der Konsistenzordnung  $h^4$ .
- Eine Differenzenformel für die dritte Ableitung der Konsistenzordnung  $h^2$ .

**Aufgabe 2: Zentraler Differenzenquotient für zweite Ableitung (4 Punkte)**

Gegeben sei der zentrale Differenzenquotient für die zweite Ableitung

$$D_h^2 f = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

- Zeigen Sie, dass  $D_h^2$  Konsistenzordnung  $h^2$  hat.
- Untersuchen Sie den Gesamtfehler bei fehlerhaften Daten mit relativem Fehler  $\epsilon$  und geben sie an mit welcher Potenz  $\epsilon^\alpha$  die Schrittweite  $h$  optimalerweise gewählt werden sollte.

**Aufgabe 3: Numerische Integration (6 Punkte)**Sei  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Die Mittelpunktsregel (offene Newton-Cotes mit  $n = 0$ ) ist

$$I_0(f) = (b - a)f\left(\frac{b + a}{2}\right).$$

Die zusammengesetzte Mittelpunktsregel ist

$$\tilde{I}_0(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), \quad x_k = a + kh, h = \frac{b - a}{n}.$$

Zeigen Sie

- Für  $f \in C^1([a, b])$  gilt

$$|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b - a)^2}{4} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

- Für  $f \in C^2([a, b])$  gilt

$$|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b - a)^3}{2} 4 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

- Für  $f \in C^2([a, b])$  gilt

$$|I(f) - \tilde{I}_0(f)| \leq \frac{b-a}{2} 4h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

**Aufgabe 4: Differentiation durch Interpolation (2 Punkte)**

Berechnen Sie die Polynominterpolation für

- $n = 1, x_0 = -h, x_1 = h,$
- $n = 2, x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h$

das Interpolationspolynom und daraus dessen Ableitung bei  $x = 0$ . Welche Differenzenformel erhält man dabei ?