Übungen zur Numerischen Analysis

Übungsblatt 2, Abgabe: Montag, 28.04.2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: Fehler in den Ableitungen (4 Punkte)
Sei $f \in C^{n+1}[a,b], x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden und $p \in P_n$ das Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$, d.h. $p(x_j) = f(x_j), j = 0, \dots, n$. Zeigen Sie:
Zu jedem j existiert ein $\tilde{x_j} \in [a,b]$ mit

$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x_j})}{(n+1)!}.$$

Hinweis: Gehen Sie analog zum Skript vor und wählen Sie K geeignet.

Aufgabe 2: Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass für die Tschebyscheff–Polynome T_n gilt:

1. $T_n \in P_n$. Für $n > 0$ hat $T_n(x)/2^{n-1}$ den Höchstkoeffizienten 1.
2. Die T_n bilden ein Orthogonalsystem im Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x) q(x) dx$$

   .
3. Die Nullstellen von T_{n+1} sind

$$x_k^n = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), k = 0, \dots, n.$$

4. Es gilt

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right\|_\infty \leq \|p\|_\infty$$

   für alle $p \in P_n$ mit Höchstkoeffizient 1.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Sei $p \in P_2$ das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützwerten

i	x_i	y_i
0	-1	-2
1	0	-3
2	2	1

mit $p(x_j) = f_j, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Neville zu $x = 1$ den Wert p(x).

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 05.05.2014, 12.00 Uhr) (4 Punkte)
Schreiben sie eine MATLAB-Funktion zur Polynominterpolation nach Newton, welche dividierte Differenzen verwendet. Testen Sie Ihr Programm an dem Runge–Beispiel, wobei sie einmal Ãquidistante Stützstellen verwenden und einmal die Nullstellen der Tschebyscheff–Polynome. Plotten Sie Ihre Ergebnisse für $n = 5, 10, 50, 100$ Stützstellen.