

Übungen zur Numerischen Analysis

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 07.07.2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: Runge-Kutta-Verfahren (4 Punkte)

Ein klassisches Runge-Kutta-Verfahren ist Heuns Formel 3. Ordnung

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + h_k \frac{1}{4}(f_1 + 3f_3), \text{ mit} \\f_1 &= f(t_k, y_k), \\f_2 &= f(t_k + \frac{1}{3}h_k, y_k + \frac{1}{3}h_k f_1), \\f_3 &= f(t_k + \frac{2}{3}h_k, y_k + \frac{2}{3}h_k f_2).\end{aligned}$$

- Beweisen Sie, dass die Formel von Heun die Ordnung 3 besitzt.
- Für die Gleichung $y'(t) = \lambda y(t)$ ergibt sich das obige Verfahren zu

$$y_{k+1} = \mu(h_k \lambda) y_k.$$

Bestimmen Sie den Faktor $\mu(h_k \lambda)$.

- Die exakte Lösung $y = e^{\lambda x}$ der Gleichung $y' = \lambda y$ erfüllt die Bedingung

$$y(t+h) = g(h\lambda)y(t).$$

Welche Beziehung besteht zwischen $\mu(h\lambda)$ und $g(h\lambda)$?**Aufgabe 2: Mehrschrittverfahren** (4 Punkte)Man bestimme α, β in dem Mehrschrittverfahren

$$y_{k+3} - y_k + \alpha y_{k+2} = h\beta(f_{k+2} + f_{k+1})$$

so, dass die Konsistenzordnung 4 erreicht wird. Ist das entsprechende Verfahren stabil?

Aufgabe 3: Mehrschrittverfahren (2 Punkte)Sei $f(t, y(t))$ beliebig. Es wird eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$$

gesucht. Als Mehrschrittverfahren definieren wir

$$y_k - y_{k+1} - y_{k+2} + y_{k+3} = 0.$$

Zeigen Sie: Dieses Verfahren ist konsistent. Warum ist das ein Problem, und welchen Schluss ziehen Sie daraus?

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 07.07.2014, 12.00 Uhr) (4 Punkte)
Implementieren Sie das Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} - y_k = 2h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}),$$

und testen Sie es an der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = y(t), y(0) = 1,$$

auf dem Intervall $[0, 1]$.