Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 24. Juni 2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
(Begleitmatrix)

Zeigen Sie: Das charakteristische Polynom der Begleitmatrix A eines Polynoms p mit Höchstkoeffizient 1 ist p. Die Dimension des Eigenraums zu jedem Eigenwert von A ist 1.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
(Konsistenz von Mehrschrittverfahren)

1. Zeigen Sie: Seien α_k, β_k die Koeffizienten eines linearen Mehrschrittverfahrens mit charakteristischem Polynom ρ. Sei weiter

$$C_j = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{k^j}{j!} - \sum_{k=0}^{m} \beta_k \frac{k^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Zeigen Sie: Das Verfahren hat genau dann die Konsistenzordnung p, wenn

$$C_j = 0,\ j = 1 \dots p,$$

und

$$\rho(1) = 0.$$

2. Folgern sie die Bemerkung zu Definition 5.18.

3. Zeigen Sie: Das Mehrschrittverfahren

$$y_k - y_{k+1} - y_{k+2} + y_{k+3} = 0$$

ist konsistent, obwohl es gar nicht von der Differentialgleichung abhängt!

Aufgabe 3: (5 Punkte)
(Differenzengleichungen und Mehrschrittverfahren)

Betrachten Sie das Mehrschrittverfahren

$$-y_k - y_{k+1} + y_{k+2} + y_{k+3} = 4hf(t_k, y_k)$$

zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = 0,\ y(0) = 0.$$

1. Prüfen Sie die Konsistenz des Verfahrens und das Kriterium von Dahlquist für das charakteristische Polynom.

2. Geben Sie alle Lösungen der homogenen Differenzengleichung ($f = 0$) an.
3. Geben Sie alle Lösungen der inhomogenen Differenzengleichung mit Anfangswerten (y0,y1,y2) und rechter Seite b_k, $k \geq 0$, an.
4. Zeigen Sie: Für $f = 0$ und $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ konvergiert das Verfahren für die Aufgabe $y0 = 0$. Ist dies ein Widerspruch zum Satz der Vorlesung (aus Konvergenz folgt Stabilität)?
5. Zeigen Sie: Für $y'(t) = 1, y(0) = 0$ und $y_0 = 0$, $y_1 = h$, $y_2 = 2h$ konvergiert das Mehrschrittverfahren. Für dieselbe Setzung mit $y_2 = 0$ konvergiert das Verfahren nicht.

Für 3. und 5. dürfen Sie Maple verwenden, wenn Sie wollen.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)
Implementieren Sie das Verfahren aus Aufgabe 3 und testen Sie es an der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = y(t),\ y(0) = 1$$

auf dem Intervall $[0, 1]$.