Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 10. Juni 2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Do.	10 - 12 Uhr	SR1B
Gruppe 2:	Do.	16 - 18 Uhr	N1
Gruppe 3:	Fr.	08 - 10 Uhr	N1
Gruppe 4:	Fr.	10 - 12 Uhr	N1
Gruppe 5:	Fr.	12 - 14 Uhr	N1

Aufgabe 1: (4 Punkte)
(Zusammenhang von numerischer Integration und Anfanswertaufgaben)
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen der allgemeinen Anfangswertaufgabe und der Definition der Runge–Kutta–Verfahren.
Beweisen Sie: Hat ein Runge–Kutta–Verfahren die Konsistenzordnung q (für ausreichend häufig differenzierbares f), dann ist die Quadraturformel

$$Q(g) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i g(\alpha_i) \sim \int_0^1 g(x)\mathrm{dx}$$

mindestens exakt für Polynome in $\mathcal{P}_{q-1}$.
Geben Sie mit Hilfe dieser Formel eine Schranke für die Konsistenzordnung eines m–stufigen Runge–Kutta–Verfahrens an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 3, die mindestens die Konvergenzordnung 3 haben für ausreichend häufig differenzierbares f.

— bitte wenden —

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Wir betrachten das allgemeine Anfangswertproblem für die Funktion

$$f(t,y) = \lambda y,\ \lambda > 0,\ I = [0,1]$$

auf äquidistanten Gittern I_h mit Schrittweite h. Es sei ein Runge–Kutta–Verfahren der Stufe m zur Berechnung von diskreten Näherungen y_h fest gewählt. Zeigen Sie:

a) Für explizite Verfahren gibt es ein Polynom $P \in \mathcal{P}_m$, so dass

$$y_h(ih) = (P(\lambda h))^i y_0.$$

b) Für implizite Verfahren gibt es eine rationale Funktion R mit Zähler und Nenner in $\mathcal{P}_m$, so dass

$$y_h(ih) = (R(\lambda h))^i y_0.$$

Für welche λh ist dieses Verfahren nicht definiert?

c) Berechnen Sie P bzw. R für das explizite und das implizite Eulerverfahren.

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung für die f_k aus dem Runge–Kutta–Verfahren in Marix–Vektor–Form. Benutzen Sie für Teil b) die Neumannsche Reihe und für Teil c) die Cramersche Regel.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)
Erweitern Sie Ihr Programm vom letzten Übungsblatt um allgemeine Runge–Kutta–Verfahren. Schreiben sie eine Prozedur, die ein Butcher–Diagramm entgegennimmt und die Anfangswertaufgabe mit dem dadurch definierten Verfahren löst. Lassen Sie auch implizite Verfahren zu.

Testen Sie Ihr Verfahren an den Beispielen zum Butcher–Diagramm aus der Vorlesung und an den Gauß–Verfahren der Ordnung $q = 6$ (siehe z.B. im Hanke–Bourgeois). Benutzen Sie wieder die Anfangswertaufgabe aus dem letzten Übungsblatt.