

Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 6, Abgabe: Montag, 27.05.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Geben Sie ein Verfahren mit möglichst hoher Ordnung an, welches $f'(0)$ mit Hilfe der Werte der Funktion an den Stützstellen $-2h, -h, 0, h, 2h$ berechnet.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

1. Seien

$$f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

stetig. Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t)y(t) + g(t)$$

an. Benutzen Sie dazu die Lösungsformel für die homogene Gleichung mit $g = 0$ aus der Vorlesung und setzen Sie $C = C(t)$ (Variation der Konstanten).

2. Wenden Sie die Lösungsformel auf die Aufgabe

$$y'(t) = ty(t) + 1$$

an. Benutzen Sie die Error-Function erf mit

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Dies Beispiel zeigt noch einmal, dass bereits einfachste Differentialgleichungen nicht notwendig Lösungen mit einfachen Funktionen besitzen.

3. Bestimmen Sie grafisch (mit Papier, Bleistift und Taschenrechner) eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = ty(t) + 1, y(0) = 1$$

im Intervall $[0, 1]$ mit der Schrittweite 0.1 auf der x -Achse. Vergleichen Sie die Kurve mit der analytischen Lösung (z.B. mit matlab, maple oder ähnlichen gezeichnet).

Aufgabe 3: (4 Punkte)

1. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe:

$$y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}, \quad y(0) = 0.$$

Geben Sie das maximale Existenzintervall an.

2. *Trennung der Variablen* Die partielle Helmholtz-Differentialgleichung in zwei Dimensionen hat in Polarkoordinaten (r, φ) , $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ die Form

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u = 0$$

mit der üblichen verkürzten Schreibweise $u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Machen Sie den Ansatz $u(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$, trennen Sie r und φ in der Gleichung und bestimmen Sie die resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Sie für v und w erhalten. Geben Sie die üblichen Namen der Differenzialgleichung und ihrer Lösungen an.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Beweisen Sie die globale Version des Satzes von Picard–Lindelöf, indem Sie im Beweis der lokalen Version statt der Supremumsnorm die Norm

$$|||f||| = \sup_{t \in I} ||e^{-2Lt}f(t)||$$

verwenden. L ist dabei wie üblich die Lipschitzkonstante von f bezüglich der zweiten Variablen.

Hinweis: Im Skript steht eine kurze Skizze, die Schritte dort sind zu begründen.