Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 13.05.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}.$$

Die Mittelpunktregel (offene Newton–Cotes mit $n = 0$) ist

$$I_0(f) = (b-a)f((b+a)/2).$$

Zeigen Sie:

1. Für $f \in C^1([a,b])$ gilt

$$|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}\mathrm{Max}_{[a,b]}|f'(x)|$$

2. Für $f \in C^2([a,b])$ gilt

$$|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24}\mathrm{Max}_{[a,b]}|f''(x)|$$

3. Die zusammengesetzte Mittelpunktsregel lautet:

$$\widetilde{I}_0(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}) \quad , \quad x_k = a + kh \; , \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a,b]$, so gilt

$$|\widetilde{I}_0(f) - I| \leq \frac{b-a}{24}\, h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \; .$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zeigen Sie:

1. Die Gewichte A_j der Gaussformeln sind positiv und es gilt insbesondere

$$A_j = \int_a^b w(x) \prod_{i\neq j} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)^2 dx.$$

2. Betrachten Sie die Integration auf dem Intervall $[a,b]$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Führen Sie eine Romberg Integration mit den Trapeznäherungen $I(h), I(\frac{h}{2})$ und $I(\frac{h}{4}$ für $h = b - a$ durch. Geben Sie die Formeln, die sich in der ersten Zeile ergeben, explizit an und benennen Sie sie.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi.$$

1. Bestimmen Sie π näherungsweise, indem Sie für das angegebene Integral drei Romberg–Schritte ausführen (Schrittweiten $h_i = \frac{1}{2^i}, i = 0, 1, 2, 3$).

2. Approximieren Sie das Integral mit der Gauss-Quadraturformel für $n = 1, 2, 4, 8$. Hinweis: Die Nullstellen der orthogonalen Polynome finden Sie z.B. im Buch von Abramowitz und Stegun.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm $romberg(f, a, b, relerr)$ zur Romberg–Integration einer Funktion f in $[a, b]$. Das Programm soll abbrechen, wenn in der letzten Spalte des Romberg–Schemas zweimal hintereinander gilt $|T_{i,k} - T_{i,k-1}| \,/\, |T_{i,k}| \leq relerr$.
Testen Sie Ihr Programm für $relerr \leq 10^{-5}$ an den Beispielen:

1. $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - 0.84\cos^2(\phi)} d\phi \approx 0.322874779$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+0.005)^4} \approx 0.249254224$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+0.05)^4} \approx 2666.379$

4. $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx \approx 0.4$

(Versuchen Sie hier, die schlechten Ergebnisse zu erklären.)