

Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 3, Abgabe: Montag, 06.05.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)Die Bandbreite einer Matrix $A = (a_{i,j})$ sei definiert als

$$\max |i - j| : a_{i,j} \neq 0.$$

Sei A die Matrix, die bei der Berechnung der Splinekoeffizienten nach Satz 2.46 auftritt, also

$$A \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}, A_{i,j} = B_{j,k}(x_i).$$

1. Berechnen Sie die maximale Bandbreite von A , wenn die Knotenbedingung aus Satz 2.46 erfüllt ist.
2. Berechnen Sie die Bandbreite von A für kubische Splines ($k = 4$) mit den Interpositionsstellen $x_i = s_{i+2}$.

Bemerkung: Tridiagonale Matrizen können explizit invertiert werden mit $O(n)$ Rechenoperationen (s. Numerische LA).

Aufgabe 2: (4 Punkte)Sei $s_i, i \in \mathbb{Z}$, eine Knotenfolge mit $s_i < s_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,k}(t) = 1 \quad \forall k \geq 1, t \in \mathbb{R}.$$

2. Rechnen Sie die quadratischen B-Splines der Ordnung 3 aus und zeigen Sie, dass sie stetig differenzierbar sind.
3. Zeichnen Sie alle B-Splines der Ordnungen 1, 2 und 3 für die Knotenfolge 1,2,4,8.

Aufgabe 3: (4 Punkte)Geben Sie den Algorithmus für die schnelle Fouriertransformation der Länge $N = 6$ nach Cooley–Tukey explizit an. Benutzen Sie die Zerlegung $p = 2, q = 3$.**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl den kubischen Spline, der die Funktion $f(x) = x^4$ an den Stützstellen $-1, 0$ und 1 interpoliert. Wählen Sie als Knoten die Stützstellen und bestimmen Sie den Spline so, dass er zweimal stetig differenzierbar linear fortsetzbar auf $\mathbb{R}$ ist.