# Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 3, Abgabe: Montag, 29.04.13, 12.00 Uhr

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Die diskrete Fouriertransformation eines $(n_1 \times n_2)$-Bildes $y$ ist erklärt durch $(\omega_n = \exp(-2\pi i/n))$

$$\widehat{y_k} = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} y_{j_1,j_2} \cdot \omega_{n_1}^{k_1,j_1} \omega_{n_2}^{k_2,j_2}$$

für $k_1 = 0, \ldots, n_1 - 1$ und $k_2 = 0, \cdots, n_2 - 1$ und $k = (k_1, k_2)$.

(a) Berechnen Sie die inverse Fouriertransformation.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformation einer Delta-Distribution, d.h.

$$y \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2},\ y_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = j_0 \text{ und } k = k_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Geben Sie eine möglichst günstige Abschätzung für den Aufwand für die Fouriertransformation eines Bildes an.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Eine (eindimensionale) Faltung lässt sich durch eine symmetrische Faltung größerer Länge berechnen.

(b) Eine Faltung lässt sich durch drei Fouriertransformationen (und einige Multiplikationen) berechnen.

(c) Die Faltung zweier Bilder $f \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ und $g \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ ist erklärt durch

$$(f \widehat{*} g)_{k,l} = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} f_{ij} g_{k-i,l-j},$$

für $k = 0, \ldots, n_1 + m_1 - 2, l = 0, \ldots, n_2 + m_2 - 2$, 0 für negativen Index.
Zeigen Sie: Auch die zweidimensionale Faltung lässt sich durch Fouriertransformationen berechnen. Geben sie eine möglichst günstige Abschätzung für den Aufwand zur Faltung zweier Bilder an, bei direkter Berechnung und bei Nutzung der Fouriertransformationen.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C^{(N+1)}$. Zur Approximation wird das Intervall in $M$ gleichgroße Teilintervalle aufgeteilt. In jedem Teilintervall wird eine Polynominterpolation an $N$ äquidistanten Stützstellen durchgeführt, $N$ sei fest. Sei $p_M$ die so entstehende Approximation. Zeigen Sie: Für $M \to \infty$ konvergiert $p_M$ gegen $f$ punktweise, und es gibt ein $C > 0$, unabhängig von $f$ und $N$, mit

$$\|f - p_M\|_\infty \leq C \frac{\left\|f^{(N+1)}\right\|_\infty}{M^N} \, \forall M \in \mathbb{N}.$$

**Aufgabe 4 (Programmieraufgabe):** (4 Punkte)
Schreiben Sie Programme zur Berechnung der symmetrischen Faltung und Entfaltung zweier Bilder mit Hilfe von Fouriertransformationen. Benutzen Sie zur Berechnung der Fouriertransformierten ein eigenes Programm, möglichst mit FFT (ansonsten wie in der Definition).
Testen Sie Ihre Programme anhand eines Beispiels (z.B. in Matlab mit *imread('cameraman.tif')* und dem Gauss-Filter *fspecial('gaussian',15,3)*). Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Laden Sie ein Bild ein und falten Sie es dann mit Hilfe Ihres Programmes. Zeigen Sie es an, und führen Sie die Entfaltung durch.

2. Laden Sie ein Bild ein und falten Sie es. Addieren Sie einen kleinen normalverteilten Fehler in der Größenordnung von $10^{-5}$ (mit der Matlab-Funktion *randn*), und führen Sie die Entfaltung durch. Zeigen Sie das Ergebnis an.
   Was fällt Ihnen auf? Warum tritt dieser Effekt auf?

Für ein schöneres Beispiel schauen Sie in der Matlab-Dokumentation unter dem Stichwort „Deblurring with the Lucy-Richardson Algorithm“ nach.