Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 2, Abgabe: Montag, 22.04.13, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei
$$h_k := 2^{-k},\ a(h) := \frac{f(h) - f(-h)}{2h},\ f(h) := \frac{1-h}{2+h}.$$
Dann approximiert die Folge $(a(h_k))_{k\to\infty}$ die Ableitung $f'(0)$.
Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson-Extrapolation eine Näherung der Ableitung $f'(0)$ für $k = 0, 1, 2$ mit $p = 1$ und $p = 2$. Berechnen Sie dazu das Neville–Schema (mit Taschenrechner oder Programm). Vergleichen Sie die Ergebnisse für $p = 1$ und $p = 2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschieden und $p \in P_n$ das Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, d.h. $p(x_j) = f(x_j), j = 0, \ldots, n$.
Zeigen Sie: Zu jedem j existiert ein $\tilde{x}_j \in [a, b]$ mit
$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)\, \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_j)}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass es keine rationale Interpolationsfunktion der Form $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p \in \mathcal{P}_1$ und $q \in \mathcal{P}_1$, gibt, die die Punkte $(0, 1), (1, 2), (2, 2)$ interpoliert.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)

(a) Implementieren Sie in Matlab ein Programm, das für eine übergebene Funktion f und übergebene Stützstellen x_k das zugehörige Interpolationspolynom berechnet.

(b) Testen Sie das Programm mit äquidistanter und Tschebyscheff–Interpolation mit der Runge-Funktion und $N = 5, 10, 15, 20$. Berechnen Sie jeweils numerisch für beide Fälle $\|w\|_\infty$.