Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 11 , Abgabe: Do, 28.06.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Charakteristisches Polynom) (4 Punkte)
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ Nullstellen des Polynoms ρ zu (DG_k) mit Vielfachheit $m_1, \dots, m_m$ und $\sum_{i=1}^m m_i = k$. Zeigen Sie, dass dann aus $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $u_n = \sum_{i=1}^m p_i(n)\lambda_i^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p_i \in \mathbb{P}_{m_i-1}$ für $i = 1, \dots, m$ folgt, u ist eine Lösung von (DG_k).

Aufgabe 2: (Lösung von Differenzengleichungen) (4 Punkte)
Sei (DG_k) gegeben. Definiere $v^{(j)} := E^{-j-1}u^{k-1}$ mit u^{k-1} Lösung von $\rho(E)u = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\rho(E)v^{(j)} = \delta_{jn}$$

für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 3: (BDF-Verfahren) (4 Punkte)
Sei $f \in C^k(S)$. Zeigen Sie, dass dann das BDF-k Verfahren die Konsistenzordnung $p = k$ bei hinreichend konsistenten Startwerten hat.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, welches das BDF-k Verfahren mit $k = 2$ und $q = 1$ zur Lösung eines Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ realisiert. Testen Sie ihr Programm mit $f(x, y) = \frac{cos(x)}{4y^3}$ auf dem Intervall $I = [1, 4]$ mit $y(1) = 1$ bei Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 1, \dots, 10$. Vergleichen die Ergebnisse mit Runge-Kutta Verfahren der Ordnungen $1, 2, 3, 4$ und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung dieses BDF-k Verfahrens.

Hinweis: Die exakte Lösung lautet: $y = (\sin(x) + 1)^{\frac{1}{4}}$