Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 10 , Abgabe: Do, 21.06.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Zentrale Differenzen) (4 Punkte)
Diskretisieren Sie das AWP $y'' + y = x,\ y(0) = y'(0) = 0$ mit exakter Lösung $\tilde{y} = x - \sin(x)$ auf einem äquidistanten Gitter $I_h \subset [0,1],\ h = \frac{1}{m},\ m \in \mathbb{N}$, indem Sie y'' mit zentralen Differenzen diskretisieren:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}.$$

Zeigen Sie, dass $u_{j+2} - 2u_{j+1} + (1+h^2)u_j = jh^3$ für $j = 0, \ldots, m-2$, $u_j \approx y(\frac{j}{m})$ gilt und, dass das geschilderte Verfahren mit Startwerten $u_0 = u_1 = 0$ als explizites Euler Verfahren, angewendet auf das AWP

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 0 \\ y_2' &= x - y_1, & y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

gedeutet werden kann.

Aufgabe 2: (Explizite Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)
Gegeben sei die Schar von linearen AWPen $y'(x) = \lambda y(x),\ y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0, x \in I = [0,1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ mit $u_0 = y_0$ durch ein **explizites** Runge-Kutta Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie, dass es ein Polynom P höchstens $m-$ten Grades gibt mit

$$u_i = (P(\lambda h))^i u_0.$$

Bestimmen Sie das Polynom P für das verbesserte Euler Verfahren und für das klassische Runge-Kutta Verfahren und vergleichen Sie es jeweils mit der Taylorentwicklung in y_0 für die exakte Lösung des AWPs.

Aufgabe 3: (Implizite Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)
Gegeben sei die Schar von linearen AWPen $y'(x) = \lambda y(x),\ y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0, x \in I = [0,1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ durch ein **implizites** Runge-Kutta Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie, dass

$$u_i = (R(\lambda h))^i u_0$$

gilt, wobei $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen P, Q höchtens $m-$ten Grades. Bestimmen Sie jeweils die Funktion R für die impliziten Runge-Kutta Verfahren mit den Schemata

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

und zeigen Sie für das erste Verfahren, dass $|e^t - R(t)| = O(t^{2m+1})$ mit $m = 1$ gilt.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Implementieren Sie das adaptive Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren mit folgendem Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & \frac{-845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
v & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & 0 \\
w & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array}$$

wobei die optimale Schrittlänge für den nächsten Schritt bei gegebener Fehlertoleranz ϵ mit

$$h_{i+1} = h_i \left(\frac{\epsilon h_i}{2|v_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{\frac{1}{4}}$$

berechnet werden kann. Testen Sie ihr Programm mit $f(x, y) = x^2 + y^2$ $y(0) = 0$ auf $x \in [0, 2]$ bei maximalem Fehler $\epsilon = 0.00001$ und maximaler Schrittweite $h_0 = 0.01$ und geben Sie die minimale Schrittweite aus.