Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 9 , Abgabe: Do, 14.06.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Diskretes Lemma von Gronwall) (4 Punkte)
Zeigen Sie: Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Folgen mit $e_{n+1} \leq (1+q_n)e_n + p_n$ für $n < N$. Dann gilt:

$$e_n \leq (e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} p_j) \exp(\sum_{j=0}^{n-1} q_j)$$

für $n < N$.

Aufgabe 2: (3-stufige Runge-Kutta-Verfahren) (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle 3-stufigen Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 3.

Aufgabe 3: (Stabilität) (4 Punkte)
Betrachten Sie das AWP $y' = -y(1+y),\ y(0) = y_0$ mit $y_0 > 0$ und setzen Sie die eindeutige Lösbarkeit voraus.

i) Zeigen Sie, ohne die analytische Lösung zu bestimmen, dass die Lösung monoton fallend ist und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ erfüllt.

ii) Sei die Folge $\{u_j\}_j$ durch das explizite Euler-Verfahren $u_{j+1} = u_j + hu_j^2$ gegeben. Unter welchen Bedingungen an h ist die Folge monoton fallend und erfüllt $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$?

iii) Sei $\{u_j\}_j$ durch das implizite Euler-Verfahren $u_{j+1} = u_j + hu_{j+1}^2$ gegeben, wobei u_{j+1} diejenige Lösung sei, die für $h \to 0$ gegen u_j konvergiert. Unter welchen Bedingungen an h existiert diese Lösung, ist die Folge $\{u_j\}_j$ monoton fallend und erfüllt $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$?

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, zum Lösen des Anfangwertproblems $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit Hilfe allgemeiner expliziter Runge-Kutta Verfahren. Das Butcher-Tableau soll hierfür als Parameter übergeben werden. Bestimmen Sie die Lösungen und den Fehler zur exakten Lösung zu $f(x,y) = \frac{2}{x}(\sqrt{y - \ln x} + \frac{1}{2})$ mit $y(1) = 0$, $1 \leq x \leq 1.8$ für das Euler, verbesserte Euler, Heun und klassische Runge-Kutta Verfahren für $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$.