Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 8 , Abgabe: Do, 07.06.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Lösung des Anfangwertproblems) (4 Punkte)
Sei $I = [a,b], G \in \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und offen, $y_0 \in G$ und sei $f \in C^0(S, \mathbb{R}^n)$ mit $S := I \times G$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = y_0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

a) $y : I \to \mathbb{R}^n$ löst das AWP.

b) $y \in C(I,G)$ und $y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))ds$.

Aufgabe 2: (Picard-Lindelöf) (4 Punkte)
Es gelten die selben Vorraussetzungen wie in Aufgabe 1 und zusätzlich erfülle f die Bedingung $\|f(x,y)\|_\infty \leq M$ für alle $(x,y) \in S$ sowie die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x,y) - f(x,z)\|_\infty \leq L\|y - z\|_\infty \forall (x,y),(x,z) \in S.$$

Sei $y_0 \in G$ gegeben, so dass für ein $\sigma \geq M(b-a)$ gilt $\{y : \|y - y_0\|_\infty \leq \sigma\} \subset G$. Zeigen sie, dass dann gilt:

1. Das AWP hat auf I genau eine Lösung $\hat{y}$.
2. Für alle $x \in I$ gilt $(x, \hat{y}(x)) \in K_M(a, y_0) \cap S$ mit $K_M(a, y_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|y - y_0\|_\infty \leq M|a - x|\}$.

Aufgabe 3: (Lemma von Gronwall) (4 Punkte)
Seien $p, q \in C([a,b])$ gegeben mit $p, q \geq 0$ und erfülle die Funktion $e : [a,b] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$ die Integralgleichung $0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)e(s)ds$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)p(s)\exp(\int_s^x q(t)dt)ds.$$

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)
Gegeben sei das AWP: $x'(t) = x^2(t),\ x(0) = 1$ auf $I = [0, 0.5]$. Schreiben Sie ein Programm, das mit Hilfe des Euler Verfahrens und des verbessertem Euler Verfahrens Näherungswerte für $x(0.5)$ bestimmt. Arbeiten Sie mit der Schrittweite $\Delta t = 2^{-k}$ für $k = 1, \ldots, 10$. Geben Sie Tabellen mit den folgenden Daten aus:

$$\Delta t \quad | \quad x_{\Delta t}(0.5) \quad | \quad e_{\Delta t}(0.5) \quad | \quad -\ln(|e_{\Delta t}(0.5)|),$$

wobei $x_{\Delta t}$ die approximative Lösung und $e_{\Delta t}$ den Fehler zwischen exakter und approximativer Lösung bezeichnen. Tragen Sie jeweils $-\ln(|e_{\Delta t}(0.5)|)$ über $-ln(\Delta t)$ auf und interpretieren Sie das Ergebnis.