Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 7 , Abgabe: Do, 24.05.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Deutung der Gauss-Quadratur als Interpolationsquadratur) (4 Punkte)
Seien p das eindeutig bestimmte Polynom in $\mathbb{P}_{2n+1}$ mit den Eigenschaften $p(x_i) = f(x_i),\ p'(x_i) = f'(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ und x_i die Nullstellen von p_{n+1}. Zeigen Sie:

i) Dann gilt $Q_n(f) = Q_n(p) = I(p)$.

ii) Für $f \in C^{2n+2}(a, b)$ gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $I(f) - Q_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} < p_{n+1}, p_{n+1} >_\omega$.

Aufgabe 2: (Interpolationsquadraturen) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass es keine Interpolationsquadratur gibt, die exakt auf $\mathbb{P}_{2n+2}$ ist.

Aufgabe 3: (Analytisches Lösen von Differentialgleichungen) (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen:

i) $yy' = -x$,

ii) $y' = 1 + y^2$,

iii) $y' = y + e^{2x}$.

Hinweis: Hilfestellung findet sich zum Beispiel in *Walter: "Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung"*.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)
Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapez-Regel, welche wie folgt definiert ist:

$$T_h(f) = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + f(b)).$$

Die experimentelle Konvergenzordnung (EOC) zu den Fehlern $e_{h_i} = |I(f) - I_{h_i}(f)|,\ h_i > h_{i+1}$ ist wie folgt definiert:

$$eoc(e_{h_i \to h_{i+1}}) = \frac{\log\left(\frac{e_{h_i}}{e_{h_{i+1}}}\right)}{\log\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)},$$

Bestimmen Sie die EOC für die Simpson-Regel und die Trapez-Regel zu $f(x) = \frac{16x-16}{x^4-2x^3+4x-4}$ auf $J = [0, 1]$ mit $h_{i>0} = 10^{-i}$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.