Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 5 , Abgabe: Do, 10.05.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Gauss-Elimination für triagonale Matrizen) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein tridiagonale Matrix, d.h.:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & 0 & \\ & c_3 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & c_{n-1} \\ & 0 & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Es gelte $|a_1| > |c_1| > 0$ und $|a_n| > |b_n| > 0$ und $|a_i| > |b_i| + |c_i|,\ b_i \neq 0,\ c_i \neq 0,\ 2 \leq i \leq n-1$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

i) Es gilt: $|\gamma_i| < 1,\ 1 < i < n-1$ und $0 < |a_i| - |b_i| < |\alpha_i| < |a_i| + |b_i|,\ 2 \leq i \leq n$.

ii) A is regulär.

iii) $A = LR$ mit $L = tridiag(b_i, \alpha_i, 0)$ und $R = tridiag(0, 1, \gamma_i)$ mit $\alpha_1 = a_1,\ \gamma_1 = c_1 \alpha_1^{-1}$ und für $2 \leq i \leq n-1\ : \alpha_i = a_i - b_i \gamma_i,\ \gamma_i = c_i \alpha_i^{-1}$.

iv) Die Anzahl der benötigten Operationen zur Berechnung von $A = LR$ und zur Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe dieser Zerlegung ist $\mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 2: (Kubische Splineinterpolation) (4 Punkte)
Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = x^4$ auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch einen kubischen Spline $g(x)$ mit den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ und den Bedingungen an die Ableitung $g'(-1) = f'(-1), g'(1) = f'(1)$ und fertigen Sie eine Skizze der Funktion und des Splines an. Welche Eigenschaft von f auf $[-1, 1]$ lässt sich hier ausnutzen?

Aufgabe 3: (Fehlerabschätzung für kubische Splineinterpolation) (4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^4$ gegeben, sei s der kubische Spline mit den Stützstellen $(a, f(a)), (b, f(b))$ und $s'(a) = f'(a),\ s'(b) = f'(b)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|.$$

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)
Sei $f(x) = x^{\frac{3}{2}},\ \Delta := 0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ und $s \in S_\Delta^{1,0}$ der lineare interpolierende Spline von f auf $[0, 1]$.

a) Wir definieren als Approximation für den $\|\cdot\|_\infty$-Fehler für $m \in \mathbb{N}, m > 2$:

$$e_{\Delta,m} = \max_{x \in \Delta_m} |f(x) - s(x)|,$$

wobei Δ_m das m-fach unterteilte Gitter Δ bezeichnet, d.h. $\Delta_m := \Delta \cup \{x_i + r(x_{i+1} - x_i)/m) |_i = 0, \ldots, n-1, r = 1, \ldots, m-1\}$. Schreiben Sie eine Routine, die die Stützstellen Δ und den Unterteilungsgrad m als Eingabe bekommt und den Fehler $e_{\Delta,m}$ berechnet.

b) Bestimmen Sie den Fehler $e_{\Delta,m}$ für $m = 10, x_k = k/n, k = 0, \ldots, n$ und $n = 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127$.

c) Wiederholen Sie dies für die Knotenwahl $x_k = (k/n)^4$.