Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 4 , Abgabe: Do, 03.05.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Trigonometrische Polynome) (4 Punkte)
Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k = 2\pi\frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq (n-1)$. Es sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ das eindeuig bestimmte Interpolationspolynom. Für $s \leq (n-1)$ seien

$$p_s := \sum_{j=0}^{s-1} c_j e^{ijx}$$

Zeigen Sie: Unter allen trigonometrischen Polynomen $q_s \in T_{s-1}(0 \leq s \leq (n-1))$ minimiert gerade p_s die Fehlerquadratsumme

$$s(q_s) = \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q_s(x_k)|^2.$$

Aufgabe 2: (Schnelle Fourier Transformation) (4 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) := x$.

a) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ das komplexe trigonometrische Interpolationspolynom $t^*(x)$ zu $f(x) = x$ auf $[0, 2\pi)$ mittels schneller Fourier Transformation.

b) Bestimmen Sie zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $t(x)$ zu $f(x) = x$ auf $[0, 2\pi)$.

c) Vergleichen Sie die Polynome $t(x)$ und $Re(t^*(x))$ und fertigen Sie eine Skizze dieser Funktionen an.

Aufgabe 3: (B-Splines) (4 Punkte)
Für eine Knotenfolge $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $t_i < t_{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} = -\infty$ seien für $i \in \mathbb{Z}$,$k \in \mathbb{N}_0$ die B-Splines $B_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} B_{i0} &:= \begin{cases} 1, & \text{für } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ B_{ik} &:= \omega_{ik}(x) b_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x), \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}, & \text{für } t_i < t_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die folgenden Aufgaben sei die Folge t_i streng monoton wachsend.

a) Berechnen und skizzieren Sie B_{i1},$B_{(i+1)1}$ und B_{i2}.

b) Zeigen Sie das für alle $i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

i) $B_{ik}|_{[t_j,t_{j+1})} \in \mathbb{P}_k$,

ii) $supp(B_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$,

iii) $B_{ik} > 0$, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ik} = 1$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Implementieren Sie die schnelle Fourier Transformation nach der Beschreibung aus der Vorlesung und testen sie ihr Programm mit einer Rechteckschwingung:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{für } x = -\pi, 0, \pi, \\ 1, & \text{für } 0 < x < \pi. \end{cases} ,$$

mit $n = 7$. Plotten Sie die Interpolationspolynome $t(x)$ und $Re(t^*(x))$ sowie $f(x)$ und geben Sie die berechneten Koeffizienten aus.