Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. Christian Himpe SoSe 2012

Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 3 , Abgabe: Do, 26.04.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Weitere Eigenschaften der dividierten Differenzen) (4 Punkte)
Sei $f \in C^0(a,b)$ und $x_0 \dots x_n \in (a,b)$ paarweise verschieden, sowie t festgewählt mit $t \neq x_k \forall k = 0 \dots n$.
Zeigen Sie:

a) Wenn p das Interpolationpolynom zu f an den Stützstellen $x_0 \dots x_n$ ist, so gilt:

$$f(t) - p(t) = f[x_0 \dots x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

b) Ist $f \in C^n(a,b)$ so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f[x_0 \dots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

Aufgabe 2: (Hermite Interpolation) (4 Punkte)
Seien $f \in C^{n+1}(a,b)$ und $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_m \leq b$. Mit $m_0 \dots m_m \in \{1, \dots, n+1\}$ und $n+1 = \sum_{j=0}^{n} m_j$.
Desweiteren sei $p_n \in \mathbb{P}_n$ das Hermite Interpolationspolynom zu den Daten

$$\begin{gathered} (x_0, f(x_0)), \dots, (x_0, f^{m_0-1}(x_0)), \\ \vdots \\ (x_m, f(x_m)), \dots, (x_m, f^{m_m-1}(x_m)). \end{gathered}$$

Zeigen Sie: $\forall x \in [a,b]\ \exists \xi_x \in [a,b]$ mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^{m_k}.$$

Aufgabe 3: (Trigonometrische Polynome) (4 Punkte)
Sei $w_k := e^{\frac{2\pi i k}{n+1}} \quad (k \in \mathbb{Z})$. Zeigen Sie:

a) $< w_k^{n+1}, w_l^{n+1} > = \delta_{kl}$,

b) $w_k^{n+1} = 1$,

c) $w_l^k = w_k^l$,

d) $w_{n+1-k}^l = w_{-k}^l$,

e) $w_k^{-l} = \bar{w}_k^l$,

f) $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} w_j^{k-l} = \delta_{kl} \quad (0 \leq k; l \leq n)$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Sei $f \in C(a,b)$ gegeben. Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ kann numerisch mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel wie folgt approximiert werden:

$$T(h_k) := h_k(b-a)(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{1}{h_k}-1} f(a+jh_k))$$

Implementieren Sie die Richardson Extrapolation für $h_k = 2^{-k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ zur Approximation von

$$T(0) = \int_a^b f(x)dx$$

Testen Sie Ihre Implementierung für $f(x) = cos(x)$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ und untersuchen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit für $n = 1, \ldots, 8$.