Übungen zur Vorlesung Numerische Analysis

Übungsblatt 0 , Abgabe: Di, 10.04.2012, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (Banachscher Fixpunktsatz) (0 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $F : D \to D$ eine Kontraktion. Zeigen Sie:

a) F hat genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$

b) Sei $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, \cdots \Rightarrow x_k \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$

c) $\|\bar{x} - x_k\| \leq L\|\bar{x} - x_{k+1}\|$

d) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|F(x_0) - x_0\|$

e) $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k+1}\|$

Aufgabe 2: (Taylor-Entwicklung) (0 Punkte)

$$I := \int_a^b f(x)dx$$

Die Approximation eines bestimmten Integrals ist ein wichtiger Aspekt der numerischen Analysis. Für diese numerische Integration (oder Quadratur) einer integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist man oftmals Näherungsverfahren angewiesen. Solche Verfahren werden Sie im Laufe der Vorlesung kennenlernen.

a) Bei gegebener äquidistanter Unterteilung von $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$ mit $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{N}$ besteht ein einfacher Ansatz darin f durch stückweise konstante Funktionen zu approximieren:

$$\hat{f}_i(x) = f(x_i) \qquad x \in [x_i, x_{i+1})$$

Das Integral lässt sich nun durch aufsummieren approximieren:

$$I \approx \sum_{i=0}^{N-1} h\hat{f}_i(x_i)$$

Bestimmen Sie die Ordnung dieses Verfahrens mithilfe der Taylor-Entwicklung.

b) Welche Ordnungen ergeben sich, wenn die Definition von $\hat{f}$ wie folgt geändert werden:

- $\hat{f}_i(x) = f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) \qquad x \in [x_i, x_{i+1})$
- $\hat{f}_i(x) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \qquad x \in [x_i, x_{i+1})$