Optimale Steuerung

Karoline Pelka, Christian Schmidt, Christoph Große Kracht

13. Dezember 2012

Einleitung

- Ende des 17. Jahrhunderts
  - Variationsrechnung (Brachistochrone)

Einleitung

- Ende des 17. Jahrhunderts
  - Variationsrechnung (Brachistochrone)
- Ab ca. 1950
  - Motivation entstammte Anfangs hauptsächlich der Luft- und Raumfahrt sowie dem Militär
  - Verallgemeinerung der Variationsprobleme, indem zwischen Steuerungs- und Zustandsvariablen unterschieden wird

Einleitung

- Ende des 17. Jahrhunderts
  - Variationsrechnung (Brachistochrone)
- Ab ca. 1950
  - Motivation entstammte Anfangs hauptsächlich der Luft- und Raumfahrt sowie dem Militär
  - Verallgemeinerung der Variationsprobleme, indem zwischen Steuerungs- und Zustandsvariablen unterschieden wird
- Heute Anwendung in diversen Bereichen
  - Hochpräzisionssteuerung technischer Prozesse
  - Optimierung von Unternehmensprozessen
  - Produktionsprozesse in der Industrie

Einleitung

- Ende des 17. Jahrhunderts
  - Variationsrechnung (Brachistochrone)
- Ab ca. 1950
  - Motivation entstammte Anfangs hauptsächlich der Luft- und Raumfahrt sowie dem Militär
  - Verallgemeinerung der Variationsprobleme, indem zwischen Steuerungs- und Zustandsvariablen unterschieden wird
- Heute Anwendung in diversen Bereichen
  - Hochpräzisionssteuerung technischer Prozesse
  - Optimierung von Unternehmensprozessen
  - Produktionsprozesse in der Industrie
  - ...

Problemstellung

- Minimiere

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

Problemstellung

- Minimiere

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

- unter den Differentialgleichungsnebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$

Problemstellung

- Minimiere

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

- unter den Differentialgleichungsnebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$

- den Steuer- und Zustandsbeschränkungen

$$u(t) \in [u_a, u_b] \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$
$$x(t) \in [x_a, x_b] \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$

Problemstellung

- Minimiere

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

- unter den Differentialgleichungsnebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$

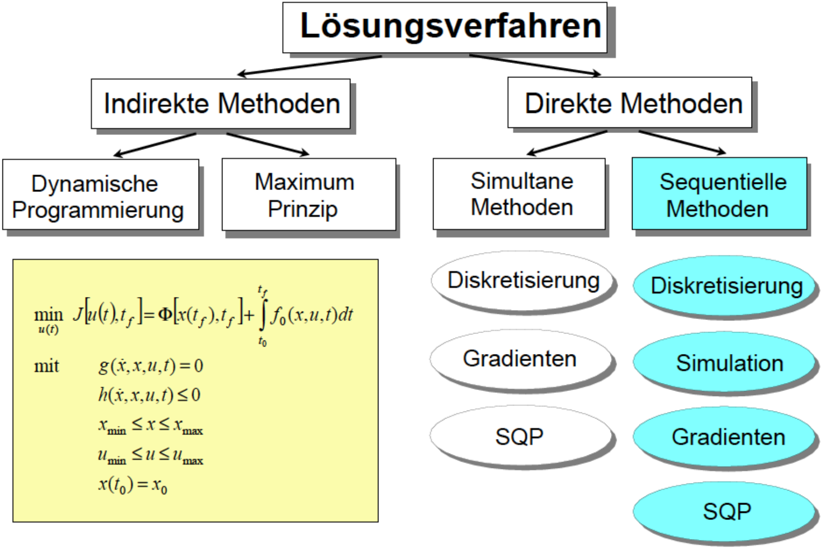
- den Steuer- und Zustandsbeschränkungen

$$u(t) \in [u_a, u_b] \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$
$$x(t) \in [x_a, x_b] \qquad t_0 \leq t \leq t_f,$$

- den Randbedingungen

$$x(t_0) = x_0, \qquad\qquad x(t_f) = x_e$$

Allgemeine Lösungsverfahren



$$\min_{u(t)} \; J\left[u(t),t_f\right] = \Phi\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\,dt$$

mit

$$g(\dot{x},x,u,t) = 0$$
$$h(\dot{x},x,u,t) \le 0$$
$$x_{\min} \le x \le x_{\max}$$
$$u_{\min} \le u \le u_{\max}$$
$$x(t_0) = x_0$$

Direktes Verfahren
Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form

Direktes Verfahren
Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form
- Beeinflussung nur an endlich vielen Stellen

Direktes Verfahren

Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form
- Beeinflussung nur an endlich vielen Stellen

Direktes Verfahren
Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form
- Beeinflussung nur an endlich vielen Stellen

- Gitter

Direktes Verfahren

Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form
- Beeinflussung nur an endlich vielen Stellen

- Gitter
- Zustandsgitterfunktion

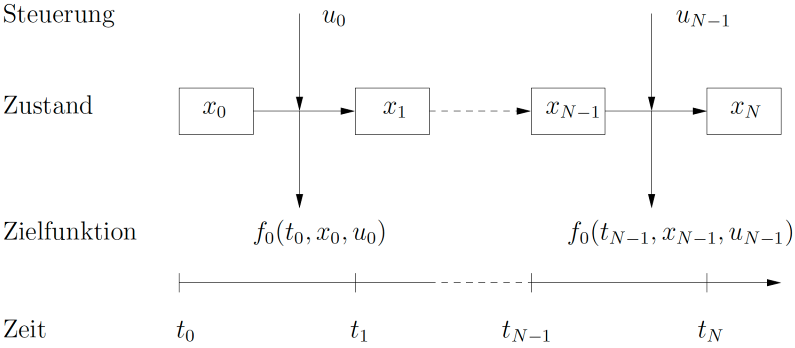
Direktes Verfahren

Diskrete Optimalsteuerungsprobleme

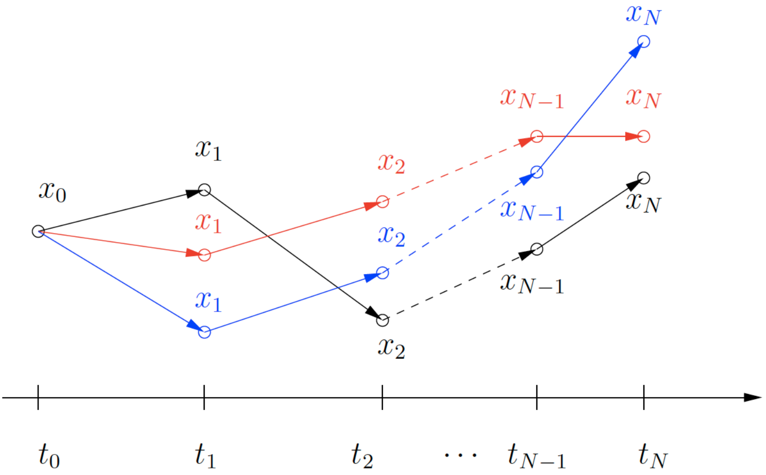
- Dynamik eines Prozesses in diskreter Form
- Beeinflussung nur an endlich vielen Stellen

- Gitter
- Zustandsgitterfunktion
- Steuergitterfunktion

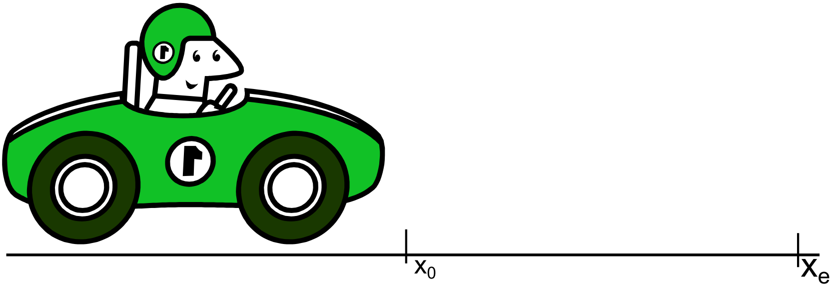
Diskrete Optimalsteuerungsprobleme



Diskrete Optimalsteuerungsprobleme



Diskrete Optimalsteuerung am Beispiel des Raketenautos



Es bezeichne

t	Zeit $t \in [0, t_f]$
$x(t)$	Position des Wagens zum Zeitpunkt t
$v(t)$	Geschwindigkeit des Wagens zum Zeitpunkt t
$u(t)$	Beschleunigung des Wagens zum Zeitpunkt t, **Steuerung**

Dynamik des Systems ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = v(t)$$
$$\dot{v}(t) = u(t)$$
$$\text{mit } x_0, x_e, v_0, v_e \in \mathbb{R}$$

gewünschte Anfangs- und Endbedingungen:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_e$$
$$v(0) = v_0, \quad v(t_f) = v_e$$

Ziel: Der Wagen soll an der vorgegebenen Endposition x_e mit der Geschwindigkeit v_e ankommen.

- Unterschiedliche Forderungen an das System
- Abhängig von diesen Forderungen unterschiedliches Zielfunktional $J(u)$

Mathematische Formulierung der Problemstellung

Mathematische Formulierung der Problemstellung

$$\min_{u(t)} J(u)$$

Mathematische Formulierung der Problemstellung

$$\min_{u(t)} J(u)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x(0) = x_0, x(t_f) = x_e$$
$$v(0) = v_0, v(t_f) = v_e$$

Mathematische Formulierung der Problemstellung

$$\min_{u(t)} J(u)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x(0) = x_0, x(t_f) = x_e$$
$$v(0) = v_0, v(t_f) = v_e$$

und den Steuerbeschränkung U_b, d.h.

$$-U_b \leq u(t) \leq U_b$$

Mathematische Formulierung der Problemstellung

$$\min_{u(t)} J(u)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x(0) = x_0, x(t_f) = x_e$$
$$v(0) = v_0, v(t_f) = v_e$$

und den Steuerbeschränkung U_b, d.h.

$$-U_b \leq u(t) \leq U_b$$

Je nach Forderungen an das System werden sich $x(t)$, $v(t)$ und $u(t)$ unterschiedlich verhalten.

In Matlab verwendete Funktionen

- Trapez-Regel zur Zeitintegration

In Matlab verwendete Funktionen

- Trapez-Regel zur Zeitintegration
- Euler-Verfahren zum Lösen von Anfangswertproblemen

In Matlab verwendete Funktionen

- Trapez-Regel zur Zeitintegration
- Euler-Verfahren zum Lösen von Anfangswertproblemen
- Runge-Kutta Stufe 4 als Alternative zum Euler-Verfahren

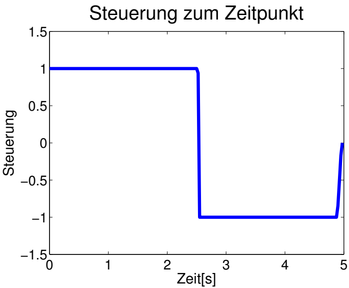
In Matlab verwendete Funktionen

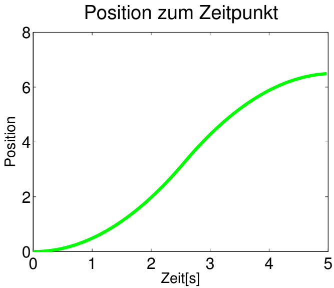
- Trapez-Regel zur Zeitintegration
- Euler-Verfahren zum Lösen von Anfangswertproblemen
- Runge-Kutta Stufe 4 als Alternative zum Euler-Verfahren
- fmincon aus der Optimization-Toolbox zur Minimierung von $J(u)$ unter Berücksichtigung von Beschränkungen an u.

Ausschließliche Berücksichtigung der Position und Geschwindigkeit

$$J = \int_0^{t_f} (x(t) - x_e)^2 + (v(t) - v_e)^2 \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

J wird minimal, wenn das Ziel möglichst schnell erreicht wird. Es ergibt sich die „Bang-Bang-Steuerung".

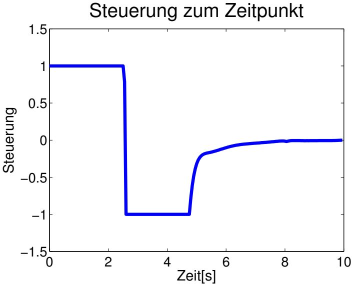


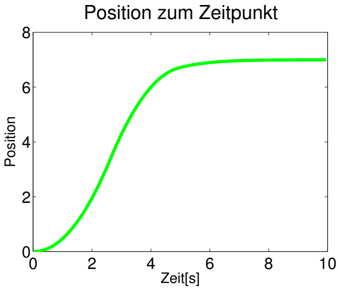


$x_e - x_0 = 7, t_f = 5, -1 \leq u \leq 1$

Bang-Bang-Steuerung:

- Steuerung bis zum Ziel stets an ihren Grenzen

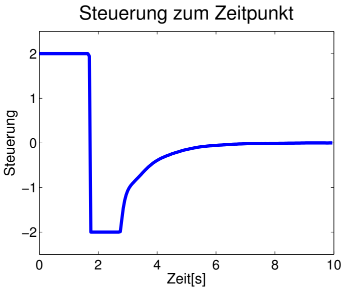


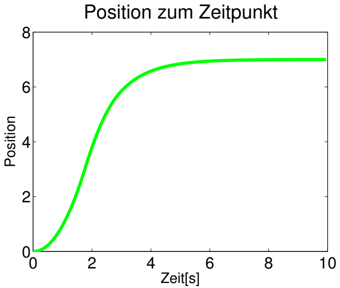


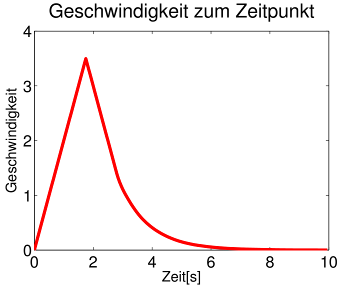
$x_e - x_0 = 7, t_f = 10, -1 \leq u \leq 1$

Bang-Bang-Steuerung:

- Steuerung bis zum Ziel stets an ihren Grenzen







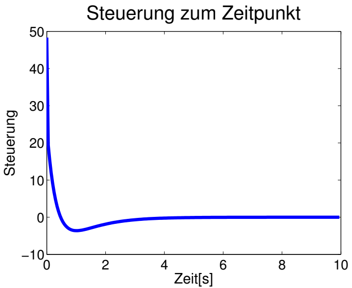
$x_e - x_0 = 7, t_f = 10, -2 \leq u \leq 2$

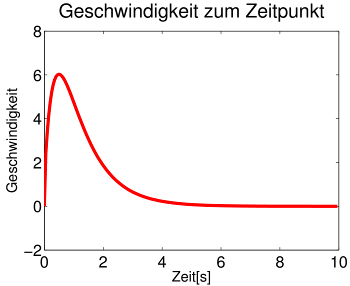
- Steuerung bis zum Ziel stets an ihren Grenzen
- Ziel wird schnell, aber mit großem Steuerungsaufwand erreicht

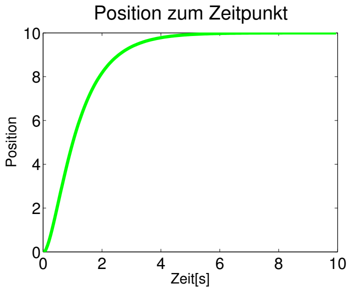
Zusätzlich kann der Steuerungsaufwand berücksichtigt werden:

$$J = \int_0^{t_f} (x(t) - x_e)^2 + (v(t) - v_e)^2 + \lambda u^2(t) \mathrm{d}t \tag{2}$$

Im Auto-Beispiel bedeutet das: Vollgas führt zu hohem Spritverbrauch.
Wie hoch die Kosten tatsächlich sind und wie viel Geld für Zeitersparnis gezahlt werden soll, lässt sich durch λ einstellen.

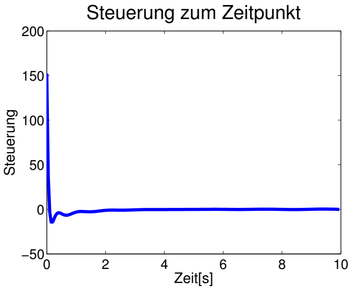


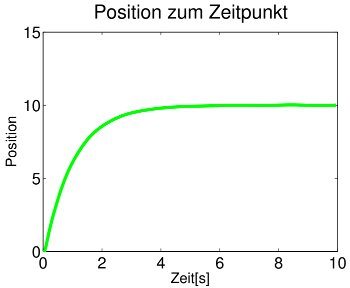


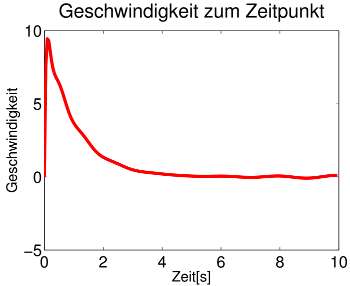


$$x_e - x_0 = 10, t_f = 10$$
$$-10 \leq u \leq 1000, \lambda = 0,1$$

- Starke Steuerung wird weitgehend vermieden.







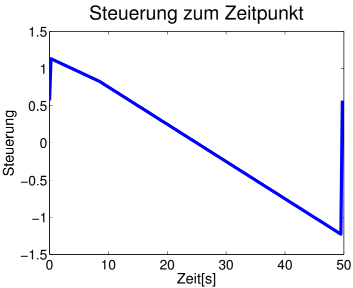
$x_e - x_0 = 10, t_f = 10$
$-10 \leq u \leq 1000, \lambda = 0,001$

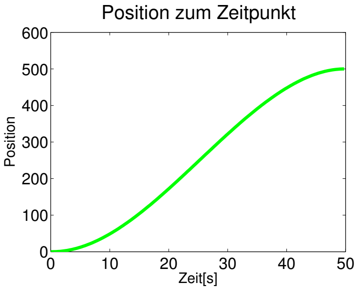
- Starke Steuerung wird weitgehend vermieden.
- Mit erhöhtem Steueraufwand wird das Ziel schneller erreicht.

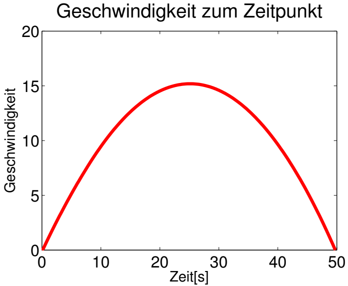
Nur die Endposition und -geschwindigkeit wird Berücksichtigt:

$$J = (x(t_f) - x_e)^2 + (v(t_f) - v_e)^2 + \lambda \int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t \qquad (3)$$

Die benötigte Zeit geht nicht mehr ein.





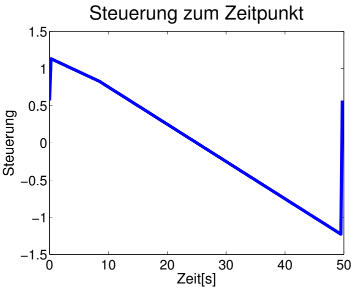


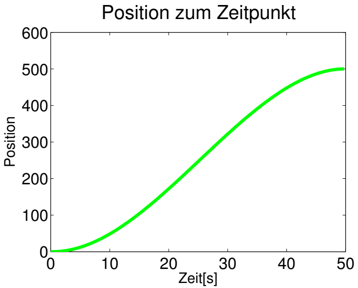
$x_e - x_0 = 500,\ t_f = 50$

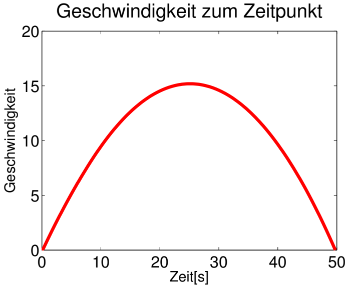
$-2 \leq u \leq 2$

Minimierung der Steuerung:

- Zeit wird voll ausgeschöpft





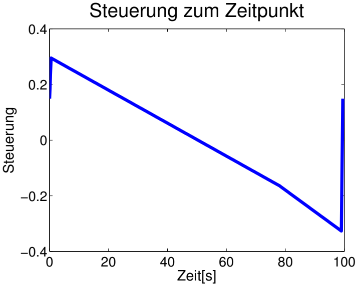


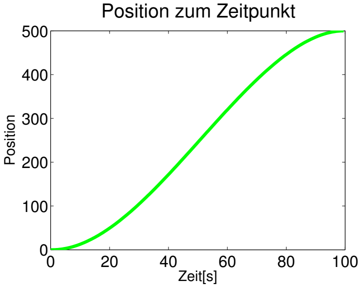
$x_e - x_0 = 500$, $t_f = 50$

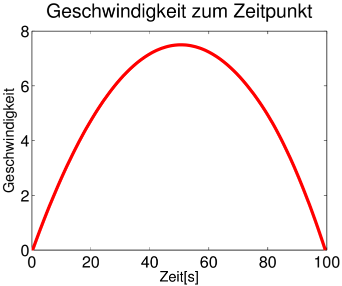
$-2 \leq u \leq 2$

Minimierung der Steuerung:

- Zeit wird voll ausgeschöpft
- Steuerung wird minimal







$x_e - x_0 = 500$, $t_f = 100$

$-2 \leq u \leq 2$

Minimierung der Steuerung:

- Zeit wird voll ausgeschöpft
- Steuerung wird minimal

Endbedingungen

- Bewegungsgleichung 2. Ordnung lässt nur zwei Randbedingungen zu: Anfangsposition und -geschwindigkeit

Endbedingungen

- Bewegungsgleichung 2. Ordnung lässt nur zwei Randbedingungen zu: Anfangsposition und -geschwindigkeit
- Endbedingungen bisher mit im Zielfunktional

Endbedingungen

- Bewegungsgleichung 2. Ordnung lässt nur zwei Randbedingungen zu: Anfangsposition und -geschwindigkeit
- Endbedingungen bisher mit im Zielfunktional
- Problem: Von diesen Bedingungen kann die optimale Steuerung bei ungünstiger Gewichtung zugunsten der anderen Summanden abweichen.

Endbedingungen

- Bewegungsgleichung 2. Ordnung lässt nur zwei Randbedingungen zu: Anfangsposition und -geschwindigkeit
- Endbedingungen bisher mit im Zielfunktional
- Problem: Von diesen Bedingungen kann die optimale Steuerung bei ungünstiger Gewichtung zugunsten der anderen Summanden abweichen.
- Lösung: Übergabe der Endbedingung als feste Bedingung an fmnincon.

Indirekter Zugang

- Bisher: Diskretisierung von Anfang an

Indirekter Zugang

- Bisher: Diskretisierung von Anfang an
- Alternative Indirekter Zugang: Suche nach Bedingungen an die optimale Steuerung

Indirekter Zugang

- Bisher: Diskretisierung von Anfang an
- Alternative Indirekter Zugang: Suche nach Bedingungen an die optimale Steuerung
- Analytische Herleitung eines Gleichungssystems, das anschließend numerisch gelöst wird

Indirekter Zugang

- Bisher: Diskretisierung von Anfang an
- Alternative Indirekter Zugang: Suche nach Bedingungen an die optimale Steuerung
- Analytische Herleitung eines Gleichungssystems, das anschließend numerisch gelöst wird
- Stichworte: Hamilton-Funktion, adjungierter Zustand